Libros de Cátedra

De los circuitos a los campos

Volumen I: Elementos de circuito

Alberto Isidori

FACULTAD DE INGENIERÍA

exactas

Editorial de la Universidad de La Plata

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

DE LOS CIRCUITOS A LOS CAMPOS

VOLUMEN I: ELEMENTOS DE CIRCUITO

Alberto Isidori

Facultad de Ingeniería.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

edulp
Editorial de la Universidad de La Plata

A mis padres, por haberme enseñado a valorar
el esfuerzo y dedicación.

Agradecimientos

Al Profesor de Electricidad, ENET Nº 1 Bragado, Carlos Petit quien me enseño los primeros pasos en este oficio y me hizo comprender la necesidad de una carrera universitaria para entender los libros que en esa época pretendía leer.

Al Ing. Guillermo Paús, Profesor Guía y compañero de trabajo por muchos años, de cuyas enseñanzas traté de dejar constancia en el libro.

Al Ing. José Rapallini, quien me ayudó en la decisión de emprender la carrera docente.

Al Dr. Carlos Suares, por haberme alentado a avanzar en la carrera docente permitiéndome compartir con él mi primer curso como profesor de Física II.

Al Ing. Jorge Massarutti, cuyas críticas al sistema de enseñanza fueron motivo de acaloradas discusiones que ayudaron a dar forma a la propuesta aquí presentada.

Al Lic. Alejandro Paola, cuya contribución en la parte inicial del libro, además de enriquecer su contenido me bridó la confianza necesaria para llevar adelante esta propuesta.

A la Ing. Cristina Cordero y Lic. Nora Pflüger por sus consejos en redacción.

Al Ing. Luis Palacio, compañero en el trabajo y en la docencia quien además de proveerme las herramientas informáticas utilizadas, escuchó y discutió mis propuestas, recargando muchas veces su trabajo para permitirme realizar esta tarea.

Al Ing. Daniel Turne, por sus comentarios afines a su especialidad que me ayudaron a completar estor temas.

Al Profesor Titular de Física II FIUNLP, Dr. Marcelo Trivi por haber permitido aplicar esta modalidad en cuatro cursos regulares y al personal docente que me acompañó en los mismos, Lic. Alejandro Paola, Ing. Hugo Uriona, Ing. Damián Bellante, Ing. Ernesto Vilche, Ing. Rosario Arrigone, Lic. Fátima Velazquez, docentes y personal técnico de la Cátedra.

A mi compañera Noelia Segura, quien me ayudó a superar los momentos difíciles, alentándome y brindando la tranquilidad necesaria para completar esta obra.

A mis hijos, Juan Pablo, Francisco y Andrés, con los que volví a recorrer las diferentes etapas de la enseñanza convenciéndome de la necesidad de un cambio al que, dentro de mis posibilidades, tenía que contribuir.

Finalmente tengo que expresar mi agradecimiento a todos los alumnos de la facultad de Ingeniería que pasaron por esta asignatura en los últimos 35 años, cuyas consultas, observaciones y críticas fueron constante fuente de inspiración y aprendizaje.

Alberto.N.Isidori

Índice

Capítulo 6

Corrientes variables en el tiempo

Capítulo 7

Corriente alterna

Introducción

Comprender las bases del electromagnetismo no suele ser una tarea simple para el principiante. Conceptos abstractos cuyo tratamiento a veces requiere elaboraciones matemáticas diferentes a las utilizadas en Física para primer año, pueden resultar un serio impedimento cuando no se tiene en claro su utilidad.

La bibliografía y planes de estudio pensados para carreras de Física, fueron utilizados durante más de cincuenta años para otras carreras, entre ellas las Ingenierías, cuando el alumno podía decidir en qué momento presentarse a rendir la evaluación final de la cursada, con tiempo suficiente para integrar los conocimientos releyendo y relacionando los temas tratados.

Las diferentes estrategias de enseñanza implementadas no fueron acompañadas por cambios en el contenido y orden en el tratamiento de los temas.

En algunos casos, para permitir una salida laboral temprana se intentó acortar la duración de las carreras posibilitando promocionar algunas materias por partes sin seguir un orden de continuidad. De no existir una evaluación integradora, difícilmente el alumno podrá relacionar los temas al ritmo impuesto para las cursadas.

La incorporación de nuevas tecnologías es otro factor a tener en cuenta. Las ventajas ofrecidas por el acceso masivo a la información pueden resultar contraproducentes aún tratándose de fuentes confiables. Errores conceptuales en el material presentado en páginas de prestigiosas universidades, pueden permanecer años en la red sin ser percibidos o denunciados siquiera por profesores de la misma Universidad. Este libro no es la excepción. Por este motivo, durante el desarrollo de los diferentes temas se alienta al lector a asumir una postura crítica utilizando, cuando el tema lo permite, diferentes estrategias de comprobación. En este sentido, la lectura de estas páginas es una tarea que requiere tomar nota, realizar los desarrollos correspondientes y analizar los resultados obtenidos.

El orden seguido en este trabajo se aparta del utilizado tradicionalmente y fue comprobada su eficacia en cursos piloto de Física II para la Facultad de Ingeniería U.N.L.P. entre 2013 y 2016 con resultados alentadores. La falta de bibliografía acorde al orden en que se tratan los temas, motivó la realización de esta obra. En ella hago referencia a las preguntas que me hice cuando cursé esta asignatura como alumno de Ingeniería en Telecomunicaciones, que se dieron por sabidas en las materias siguientes o que su explicación pasó inadvertida ante la carga matemática utilizada en el tratamiento del tema. En los 35 años de docencia en esta materia fui encontrando, para muchos de estos interrogantes, la explicación simple que quiero compartir con este material.

El trabajo en el laboratorio y la cantidad de veces que muchos alumnos intentan aprobar la cursada sin llegar a lograrlo, fueron otros de los motivos que contribuyeron a definir el contenido de estas páginas.

Cuando la falta de tiempo para la realización de las prácticas en el laboratorio se soluciona con experiencias pre-armadas en las que el estudiante solamente observa anotando la indicación de los instrumentos, se desaprovecha esta etapa del aprendizaje. Diseñando prácticas de

laboratorio simples y permitiendo trabajar en libertad, con la supervisión del docente, en poco tiempo adquieren la confianza necesaria para esta tarea. El reconocimiento del material utilizado, finalidad de sus especificaciones y utilización adecuada tratados en las páginas de este libro, tendrían que contribuir en este sentido.

Cuando el joven elige seguir una profesión es porque siente alguna afinidad por la misma, aunque en realidad muchos recién comprenden de qué se trata cuando comienzan a ver temas relacionados con el ejercicio de la misma, que en el mejor de los casos y dependiendo de la especialidad elegida, comienza a ocurrir a partir de las materias del tercer año. Desafortunadamente, los que abandonan después de 4 ó 5 años sin llegar a esta instancia no son pocos. Con el actual sistema este grupo deja la facultad de Ingeniería, en el mejor de los casos con conocimientos de física y matemáticas, sin haber visto temas relacionados con el motivo inicial de su elección.

Este libro trata sobre electromagnetismo. Por lo tanto, los ejemplos que propone tienen afinidad con las carreras relacionadas con esa temática. Aunque muchos de estos contenidos serán abordados más rigurosamente en el ciclo superior, su inclusión al inicio permitiría al alumno adquirir nociones fundamentales desde la perspectiva de la Ingeniería.

De incorporarse un esquema similar para otras materias del ciclo básico, el estudiante llegaría a tercer año con conocimientos generales sólidos de todas las carreras. Así podría confirmar su elección o cambiar de carrera, y si tuviera que abandonar, estaría mejor preparado para desempeñarse en lo que le gustaba al ingresar en la Universidad.

De esta manera, cuando el perfil profesional requerido no contemplara tareas de desarrollo o diseño, los conocimientos de aquél que llegó al tercer año serían suficientes para continuar su formación en la empresa en la que trabajare. Para que esto fuera posible, la institución universitaria tendría que certificar los avances logrados por el estudiante en los años cursados en ella, con el título habilitante correspondiente.

El apéndice final es el resultado de consultas realizadas por alumnos provenientes de escuelas técnicas y de mi propia experiencia. Una vez que se conocen las operaciones básicas de un osciloscopio es difícil para el principiante encontrar experiencias donde aplicar su conocimiento. Los ejemplos presentados, además de mostrar qué se puede hacer con este instrumental, permiten relacionar diferentes temas tratados en el libro.

En esta primera parte el lector podrá comprender el principio básico de funcionamiento de motores eléctricos, iluminación, transmisión de la energía, comunicación por cable y más, dejando abierto un interrogante disparador para el segundo volumen. Los temas tratados en el mismo, además de referirse continuamente a los del primer volumen, constituyen la contribución correspondiente a este nivel para la completa formación del Ingeniero. Espero que, con las modificaciones necesarias, el método presentado sea una contribución a la mejora del sistema de enseñanza actual.

Ing. Alberto Isidori

Antecedentes históricos

Históricamente, el estudio del electromagnetismo se puede dividir en tres etapas. La primera se extiende desde las experiencias que realizaban en la antigua Grecia (500ac) hasta 1800. En las seis o siete décadas que siguieron se sentaron las bases que vamos a considerar en este libro y que fue seguida por la tercera etapa hasta la actualidad.

En la primera parte se descubrió que ciertas piedras atraían objetos de hierro y hacia el año mil de nuestra era se utilizaba la brújula para orientar a los navegantes.

Junto con el descubrimiento de los imanes, se comprobó la existencia de otro tipo de materiales que, después de frotarlos, atraían objetos livianos. Basándose en los efectos electrostáticos se llegaron a construir máquinas que permitían efectos llamativos, descargas similares al rayo, luminosidad en torno a los objetos cargados y más, que no tuvieron aplicación práctica más allá de la novedad y espectacularidad que presentaban.

Para esta época el avance científico en otras ramas de la física había sido importante.

Desde siempre el hombre sintió temor ante las tormentas relacionando la luminosidad del rayo con el estruendo que posteriormente vendría, dos magnitudes que podía detectar: luz y sonido.

Aristóteles fue el primero en postular al sonido como una onda que avanza impulsada por el movimiento de una fuente. Pitágoras comprobó que los sonidos producidos por hilos vibrantes se relacionan con su longitud mientras que Galileo asoció el tono percibido con la frecuencia del sonido realizándose la primera medida de su velocidad en 1640. Posteriormente se comprobó que el sonido no se propaga en el vacío.

La teoría matemática de la propagación de las ondas sonoras comenzó en 1686 cuando Newton postuló que la propagación del sonido se explicaba considerando pulsos de presión entre partículas vecinas. En 1687 presentó la ley de gravitación universal y con ella la idea de que los fenómenos de la naturaleza pueden ser explicados en términos de fuerzas de atracción y repulsión actuando a distancia entre las diminutas partículas de los cuerpos. En 1746 D'Alembert describió matemáticamente la onda en una cuerda.

Paralelamente al estudio del sonido se realizó el estudio de la luz. En el 300ac Euclides de Alejandría postuló que luz se propaga en línea recta y logró explicar la reflexión. Entre 1600 y 1700 se postuló que la luz se propaga con velocidad finita, se dedujeron las leyes de reflexión y refracción y se postuló que se trataba de una onda pudiéndose separar sus colores mediante un prisma. En 1676 se realizó la primera determinación experimental de la velocidad de la luz. En 1704 Newton postuló que la luz consiste en corpúsculos que pueden propagarse en línea recta y no ondas que pueden doblar las esquinas (como el sonido en una ventana). Para justificar la propagación de la luz en el vacío, tomó de la mitología griega el término éter, sustancia muy fina que llena todo el espacio. Según Newton, los corpúsculos de luz excitarían ondas en el éter.

En 1801 Tomas Young descubrió que la luz podía interferir, volcando la balanza a favor de la teoría ondulatoria desarrollada por el físico holandés Christian Huygens.

Este era el estado de la ciencia en 1800 cuando comienza la segunda etapa del estudio del electromagnetismo que comprende unos cincuenta años a partir de 1800, fecha en que Alessandro Volta dio a conocer su invento: la pila voltaica. Muchos comenzaron a construir diferentes tipos de pilas, mejorándolas y realizando diferentes experiencias con circuitos eléctricos.

En esta etapa se desarrollaron las aplicaciones que permitieron iluminar ciudades, llevar energía de manera económica a las fábricas y hogares, construir diferentes máquinas y aparatos que facilitaron la tarea del hombre.

De la misma manera que, utilizando una codificación previamente establecida, es posible enviar un mensaje apagando y encendiendo una linterna, mediante la conexión y desconexión de una batería se puede encender y apagar una lámpara o activar algún dispositivo en el otro extremo de la línea utilizada para interconectarlas. Así, al final de este periodo, a orillas de los ferrocarriles que comenzaban a instalarse, se comenzaron a tender cables para transmitir información.

La necesidad de comunicación entre ciudades pronto se extendió a la comunicación entre países en diferentes continentes. En 1852 se instaló el primer cable submarino entre Inglaterra y Francia a través del Canal de la Mancha. En 1858 se comenzaron a probar conexiones telegráficas entre Terranova e Irlanda a través del Océano Atlántico y en 1870 se utilizaban comercialmente transmisiones confiables por cable.

Prácticamente quedaba poco por inventar, la vida de los seres humanos se había facilitado enormemente por los avances de la técnica. La teoría del éter llevaba casi 200 años y seguía viva: la luz se propagaba como una onda y por tanto necesitaba un medio material para su propagación y el éter encajaba perfectamente bien.

A medida que se descubrieron los diferentes aspectos del electromagnetismo que llevaron a los adelantos mencionados, algunos físicos trataron de imaginar cómo se realizaba la interacción electromagnética. Michel Faraday, utilizando líneas de fuerza para visualizar fenómenos físicos pudo explicar fenómenos complejos como la inducción electromagnética que el mismo había descubierto experimentalmente. Sugirió que la acción a distancia, vigente desde la época de Newton, no resultaba adecuada para explicar la relación entre fuerzas eléctricas y magnéticas. Debido a su profunda fe religiosa, estaba convencido de que las diferentes fuerzas provienen de una única fuerza, introduciendo la hipótesis de que las fuerzas constituyen la única sustancia en física, desapareciendo la distinción entre materia y fuerza y dando origen a lo que sería la teoría de campo. Las ideas de Faraday fueron comprendidas y tratadas matemáticamente por James Clerk Maxwell quien en 1860 predijo la posibilidad de la existencia de ondas electromagnéticas. Quince años más tarde, Hertz pudo implementar una experiencia que comprobó las predicciones de Maxwell. Realizó demostraciones en cines y grandes locales en los que debía montar grandes pantallas metálicas para dirigir las ondas y así poder detectarlas. Por este motivo, estaba convencido de que no tendrían aplicación práctica.

Afortunadamente otros no pensaron de la misma manera contribuyendo en el diseño de antenas y transmisores que permitieron transmitir señales telegráficas sin el sustento de cables.

La era de las telecomunicaciones había comenzado.

CAPÍTULO 1

Cargas eléctricas

En el transcurso de su vida, el ser humano siente continuamente los efectos de la atracción gravitatoria, originada por la masa de las partículas que constituyen la materia. Además de estas, existen otros tipos de interacciones, entre ellas las electromagnéticas, que se manifiestan sobre las cargas eléctricas.

La carga eléctrica es una característica de las partículas, como el color o el sabor, que puede ser detectada por las fuerzas que sobre ella ejercen otras cargas, conocidas bajo el nombre de fuerzas eléctricas.

La manera en que interactúan las partículas cargadas eléctricamente, o portadores de carga eléctrica, depende de su estado de movimiento. Se denomina electrostática a la parte del electromagnetismo que se ocupa de las fuerzas entre cargas en reposo, reservándose el término electromagnetismo para el caso general de cargas en movimiento.

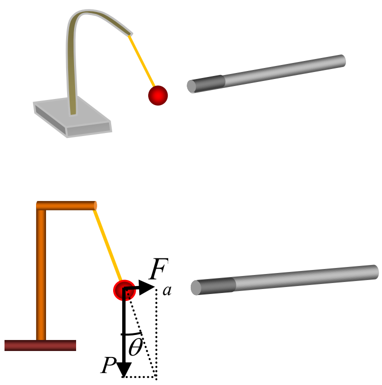


Fig.1.1

Una forma de comprobar la existencia de una carga eléctrica es detectando una fuerza eléctrica sobre la partícula que la soporta.

Acercando una varilla a un objeto liviano colgado de un hilo, la atracción entre las masas de la varilla y el péndulo no es suficiente para permitir una desviación apreciable del péndulo. Contrariamente si se frota la varilla con un paño (sosteniéndola con un guante o mango aislante), la desviación del péndulo será notable al acercar la varilla.

Este hecho permite concluir que al frotar la varilla con el paño se modificaron algunas características de ésta, apareciendo una fuerza cuyo origen no está en la masa de las partículas que constituyen la varilla (video).

En la figura se indica con F_a a la fuerza de atracción, P al peso del objeto suspendido y θ al ángulo de desviación del péndulo.

$$tg(\theta) = \frac{\vec{F}_a}{\vec{P}}$$

Utilizando el subíndice 1 para considerar la situación antes de frotar la barra y 2 luego de hacerlo, se puede realizar la comparación entre ambos tipos de fuerzas.

$$\frac{\vec{F}_{a2}}{\vec{F}_{a1}} = \frac{tg(\theta_2)}{tg(\theta_1)}$$

Al ser $\theta_2 >> \theta_1$, se puede asegurar que

$F_{eléctrica} >> F_{masas}$.

Frotando más enérgicamente la barra, se incrementa la magnitud de esta fuerza. El mismo resultado se obtiene acercando más la barra al péndulo, pudiéndose afirmar que la intensidad de la fuerza eléctrica depende del estado eléctrico de los objetos involucrados y de la distancia entre ellos.

Cuando frotamos un peine para atraer un trocito de papel, la fuerza eléctrica interviniente supera a la atracción ejercida sobre el papel por la masa de todas las partículas que constituyen La Tierra.

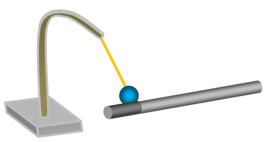
Conductores y dieléctricos

En la experiencia anterior la barra se mantiene suficientemente alejada del péndulo de modo que no llega a tocarlo. Considerando que las experiencias se realizan en un ambiente seco, si la barra alcanza a tocarlo el resultado obtenido dependerá del tipo de material del objeto colgado del mismo. Utilizando materiales diferentes para el objeto liviano colgado del hilo, es posible comprobar que se comportan de manera diferente ante las fuerzas eléctricas (video).

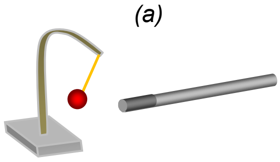
Existe un conjunto de materiales, entre los que se encuentra el vidrio, porcelana, plástico y madera seca, que permanecen unidos a la varilla cargada después del contacto (fig.1.2a). Para otros materiales, entre los que se puede mencionar principalmente a los metales, la fuerza entre los objetos después del contacto, es de repulsión (fig.1.2b). En estos materiales, denominados conductores de la electricidad, las cargas eléctricas pueden permanecer en reposo, desplazarse con velocidad constante o con movimiento acelerado, siendo ampliamente utilizados para describir diferentes aspectos del electromagnetismo.

Con un pedacito de hoja de carpeta se hacen dos bolitas que se cuelgan de hilos formando dos péndulos. Una se recubre con cinta de nylon cuidando que sea la parte lisa la que se toca con la barra frotada.

Para repetir una experiencia se debe descargar al objeto colgado del hilo tomándolo con la mano.



(a)



(b)

Fig.1.2

Electroscopio

Un electroscopio es un instrumento de medida utilizado para el estudio de fenómenos electrostáticos.

Su principio de funcionamiento se basa en la relación existente entre la desviación de un péndulo eléctrico y la intensidad de la fuerza ejercida sobre el objeto suspendido del mismo.

Está formado por una varilla metálica que en un extremo se une a un objeto metálico (esfera, disco) y en el otro lleva suspendidas dos hojuelas metálicas móviles muy delgadas. Mediante un tapón aislante, el conjunto se separa eléctricamente de la caja metálica que sirve de soporte. Una ventana de vidrio permite ver la indicación en una escala.

Al depositar cargas eléctricas sobre la esfera, las mismas se reparten por los conductores del sistema. La repulsión entre las hojuelas cargadas con cargas del mismo signo origina la desviación observada. El ángulo que forman es indicador de la fuerza eléctrica de repulsión entre ellas y será mayor cuanto mayor sea la cantidad de cargas depositadas en el instrumento, independientemente de su signo (video).

Para poder explicar los fenómenos observados es necesario contar con instrumental que permita cuantificar o al menos comparar las magnitudes involucradas.

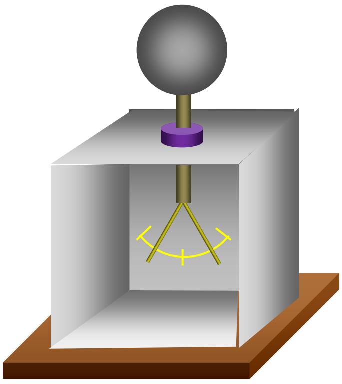


Fig.1.3

Estados eléctricos iguales

Cuando se pone en contacto la barra frotada con el objeto conductor colgado del péndulo, la fuerza eléctrica de atracción se transforma en repulsión. Se puede suponer que este cambio se debe a la transferencia hacia el péndulo de parte del estado eléctrico de la barra.

Poniendo dos péndulos conductores en contacto se observa que se separan después de haber sido tocados por una misma barra cargada (video).

De esta manera se puede concluir diciendo que, independientemente del estado eléctrico, habrá una fuerza de repulsión entre dos objetos con el mismo estado eléctrico (video).

Se observa repulsión entre los objetos cargados con la misma barra después de haberla frotado con un paño independientemente del material utilizado para la barra y el paño.

Estados eléctricos diferentes

Acercando dos péndulos conductores, cada uno previamente tocado por una barra de material diferente y luego de haberla frotada con paño de material adecuado, el resultado puede ser repulsión o atracción entre los péndulos. Puede comprobarse que existe atracción entre los péndulos cargando uno de ellos con una barra de vidrio frotada con seda y el otro con una barra de caucho frotada con lana (video).

Las fuerzas eléctricas pueden ser de atracción o de repulsión. Estados eléctricos iguales se repelen mientras que se atraen si son diferentes.

Cargas eléctricas positivas y negativas

La experiencia anterior permite comprobar que existen dos tipos diferentes de cargas eléctricas, diferenciadas por su signo. Por convención, se denominó “positiva” al tipo de carga adquirida por el vidrio cuando es frotado con seda y “negativa” a la adquirida por el caucho cuando es frotado con lana.

En cada átomo que constituye la materia, la carga neta es nula, existiendo tantas cargas positivas como negativas.

Equilibrio de cargas

Contrariamente a como sucede con la atracción gravitatoria, no es común percibir los efectos de las fuerzas originadas por las cargas eléctricas de las partículas que constituyen la materia. Puesto que las fuerzas eléctricas se manifiestan entre cargas eléctricas y pueden ser de atracción o de repulsión, para explicar por qué es nula la fuerza originada por un objeto material sobre cualquier carga externa alejada del objeto, deberá considerarse que se cancelan los efectos sobre la misma. Para esto, si algunas de las partículas que constituyen los átomos poseen cargas eléctricas, cada átomo deberá tener igual cantidad de cargas positivas y negativas, pudiéndose suponer que en la naturaleza existen tantas cargas positivas como negativas; de no ser así se sentirían los efectos de una fuerza eléctrica resultante. Así cómo es posible descargar un objeto cargado tocándolo con la mano, también se observa que desparece el estado eléctrico cuando dos objetos con diferentes estados eléctricos se ponen en contacto (video) (video).

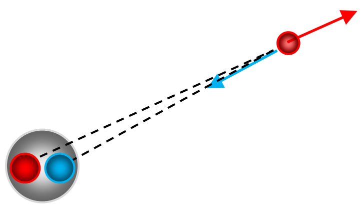


Fig.1.4

Aún en el hipotético caso en que igual cantidad de cargas de diferente signo se agrupen como se indica en fig.1.4, su efecto sobre una carga externa se anula cuando la distancia es grande comparada con la separación entre ambos grupos de carga.

Modelo clásico del átomo

Aunque las fuerzas eléctricas mantienen unida a la materia y son las responsables de diferentes características de los medios materiales, normalmente pasan inadvertidas debido a que los átomos que constituyen la materia son eléctricamente neutros y sus dimensiones despreciables aún para distancias del orden de la milésima parte de un milímetro.

Considerando que el movimiento de los planetas pudo describirse sin intervención de las fuerzas eléctricas y que entre partículas estas fuerzas son de mayor intensidad que las debidas a las masas, podemos suponer que en la naturaleza debe existir igual cantidad de cargas de ambos tipos.

Que los átomos sean eléctricamente neutros implica que están constituidos por partículas neutras y/o por igual cantidad de partículas con cargas de diferente signo. El modelo clásico de un átomo considera que la mayor parte de la masa está ubicada en un núcleo de pequeñas dimensiones formado por neutrones y protones. Alrededor del núcleo existen electrones en igual cantidad a los protones.

La carga eléctrica de un protón es igual a la de un electrón aunque de signo contrario: positivo para el protón y negativo para el electrón. El neutrón, de carga neta nula, posee una masa levemente superior a la del protón y algo más de mil ochocientas veces la masa de un electrón.

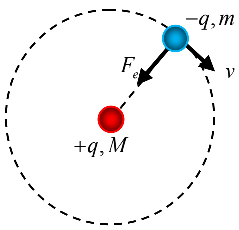


Fig.1.5

Debido a que cargas de signos opuestos se atraen, el modelo atómico clásico considera que los electrones giran alrededor del núcleo describiendo órbitas determinadas por la fuerza eléctrica resultante sobre cada uno de ellos.

Para el átomo más simple, dicho modelo supone que un electrón de carga –q y masa m gira en una órbita de radio R con velocidad v alrededor de un protón sostenido por la fuerza eléctrica de manera similar al giro de una piedra atada a una soga. La energía del electrón está asociada al radio de la órbita y a la fuerza eléctrica originada por el núcleo.

El tamaño del núcleo depende del número de protones y neutrones siendo entre diez mil y cien mil veces menor que el tamaño total del átomo que es del orden de un Ångström (1Å=$10^{-10}\,m$). Los electrones de las órbitas externas están ligados al núcleo con menor energía y si algún electrón abandona al átomo este se convierte en un ión positivo.

Modelo simple de un conductor

Un átomo está formado por neutrones y cargas positivas en el núcleo e igual cantidad de electrones describiendo órbitas con diferente energía alrededor del mismo.

En un conductor, el tamaño de cada átomo no puede despreciarse frente a la separación existente con los átomos vecinos. Por este motivo, la fuerza sobre cada carga ejercida por las restantes cargas del material, es suficiente para "arrancar" algún electrón débilmente ligado al núcleo.

Cuando un átomo cede un electrón a la red cristalina, se convierte en un ión positivo (N protones y (N-1) electrones). Por lo tanto un conductor eléctricamente neutro estará formado por iones positivos "fijos" formando la estructura cristalina del material y electrones libres en igual cantidad.

El término "fijo" se refiere a que aún vibrando en torno a una posición, no pueden trasladarse de un lado a otro.

En presencia de una fuerza eléctrica, el movimiento al azar de los electrones entre átomos de la red tendrá mayor probabilidad de realizarse en sentido de la fuerza, originando un desplazamiento de electrones hacia un lado, el que adquiere exceso de carga negativa, dejando un déficit de electrones en el otro extremo que se cargará positivamente. Esta separación de cargas en conductores se denomina inducción electrostática y la barra cargada que la origina recibe el nombre de barra inductora (video).

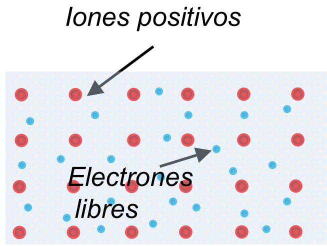
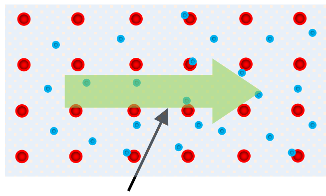


Fig.1.6

El modelo más simple de conductor supone que en el metal existen iones positivos regularmente espaciados e igual cantidad de electrones libres moviéndose al azar por la red cristalina de manera similar a como lo hacen las moléculas de un gas.



Fuerza sobre los electrones

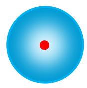
Fig.1.7

Modelo simple de un aislador

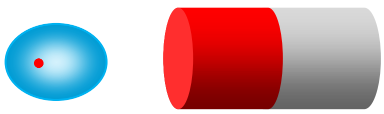
En los materiales aislantes los átomos mantienen todos sus electrones. Así, por no tener electrones libres, estos materiales no presentan las propiedades eléctricas de los conductores. De todos modos, las órbitas de los electrones se deforman en presencia de fuerzas eléctricas externas.

Aunque sigue manteniéndose la neutralidad de cargas, en cada átomo se produce un leve desplazamiento de las mismas como se esquematiza en fig.1.8b. El sistema formado por dos cargas iguales de signo contrario separadas una distancia pequeña respecto a sus dimensiones recibe la denominación de dipolo eléctrico.

Cuando se acerca una varilla cargada eléctricamente a un objeto aislante, se inducen dipolos eléctricos (fig.1.9a) quedando los extremos del dieléctrico con igual cantidad de cargas en exceso de diferente signo. Se denomina a este efecto polarización del dieléctrico. El esquema de fig.1.9b es válido indistintamente para aisladores o conductores y permite mostrar que cuando se acerca una la varilla cargada eléctricamente en los extremos del objeto inicialmente neutro aparecen cargas de signos opuestos en igual cantidad (video).



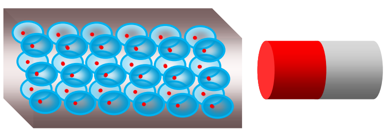
(a)



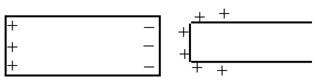
(b)

Fig.1.8: Dipolo inducido

Existen otros mecanismos de polarización además de la deformación de orbitales



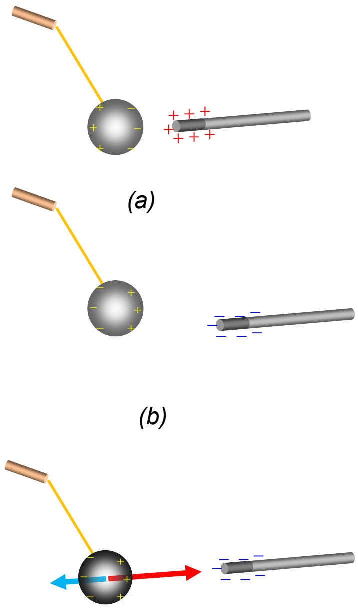
(a)



(b)
Fig.1.9

Atracción de objetos neutros

Cuando se acerca una barra cargada a un péndulo neutro se observa atracción del mismo. Si el objeto colgado del hilo es conductor de la electricidad, al acercar la barra cargada se inducen cargas de polaridad opuesta a la de la barra en el lado más próximo a esta quedando el otro extremo con carga del mismo tipo que la barra. Si el péndulo es dieléctrico, debido a la polarización del material se obtiene un resultado similar. En ambos casos, la atracción sobre las cargas de la cara más cercana a la barra será más intensa que la repulsión sobre el extremo más alejado (video).



(a) (b) (c)

Fig.1.10

Cuerpos cargados eléctricamente

Un cuerpo está cargado eléctricamente cuando las cantidades de carga positiva y negativa del mismo dejan de ser iguales. Cuando se frota una varilla con un paño, dependiendo de los materiales utilizados pasarán algunas cargas de un objeto a otro. Si se trasladan cargas positivas, el objeto que las recibe quedará cargado positivamente y el que las cede tendrá el mismo exceso de cargas pero negativa. Si en cambio se trasladan cargas negativas, el objeto que las recibe se cargará negativamente y el que las entrega se cargará positivamente.

En el caso de considerar conductores cargados, se debe tener en cuenta que la característica principal de los mismos es que algunos portadores de carga eléctrica pueden moverse libremente por el material. En los metales, los portadores móviles de carga eléctrica son electrones.

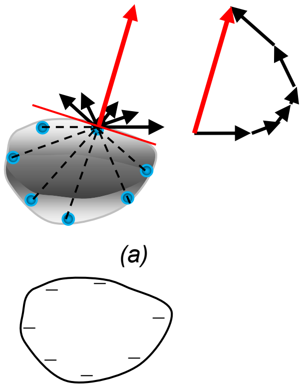
En un conductor, los electrones libres están siempre en movimiento debido a la energía interna del material. Si está cargado eléctricamente, alcanzado el equilibrio habrá mayor probabilidad de encontrar exceso de cargas en determinadas regiones.

Carga de un aislante

Cuando se frota la varilla aislante con un paño, se quitan electrones de los átomos de la superficie de uno de los objetos, depositándose en la superficie del otro. El trabajo necesario para sacar un electrón de un material depende del tipo de material. Así, el vidrio cede electrones a la seda cargándose positivamente mientras que al frotar caucho con lana, el

Al frotar una barra aislante con un paño, el exceso de cargas en la barra queda en los lugares donde se ejerció la acción de frotamiento.

mismo recibe electrones adquiriendo carga negativa. En ambos casos, el paño utilizado para frotar se carga con igual cantidad de carga eléctrica que el objeto frotado, aunque de signo opuesto (video). Cuando un objeto cargado se pone en contacto con un aislante, ambos quedan unidos sin que exista pasaje de cargas hacia el aislante. Por este motivo, si logramos separarlos sin llegar a tocarlos, al acercar nuevamente el objeto cargado se vuelve a observar atracción (video).



(a)

(b)

Fig.1.11

Distribución de cargas en conductores en equilibrio electrostático

Antes de considerar las diferentes formas de cargar eléctricamente un objeto conductor es conveniente analizar cómo se distribuyen las cargas en exceso en estos materiales.

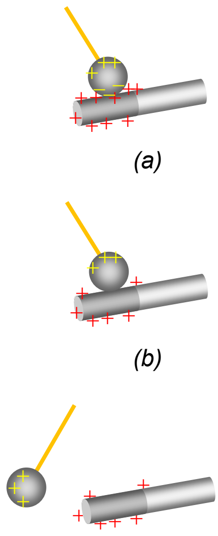
Quitando algunos electrones libres, el conductor adquiere exceso de carga positiva mientras que si se agregan electrones, el objeto se carga negativamente.

En un cuerpo metálico cargado negativamente, los electrones en exceso se repelen alejándose uno de otro hasta alcanzar la superficie del objeto, que no pueden abandonar a menos que se les entregue una cantidad suficiente de energía para hacerlo (fig.1.11).

Si la carga en exceso es positiva, existirán algunos iones positivos más que electrones libres. Estos iones positivos corresponden a átomos en la superficie del metal que han cedido algún electrón y su ubicación es tal que no producen una componente de fuerza que desplace electrones libres del metal (video). De esta forma, se puede asegurar que no habrá exceso de cargas en el interior del conductor.

Si existen cargas en exceso, estas se ubican en la superficie.

Respecto a cómo se distribuyen, si están más juntas en un lugar que en otro, se verá que la cantidad de carga por unidad de superficie es mayor en las partes con menor radio de curvatura.



(a)

(b)

(c)

Fig.1.12

Carga por contacto

Cuando la varilla cargada hace contacto físico con el objeto colgado, si el material utilizado es conductor de la electricidad y la barra está cargada positivamente, al hacer contacto electrones libres del conductor serán atraídos por las cargas

Cuando un objeto metálico es tocado por un cuerpo cargado, parte de la carga del cuerpo pasa al metal. En la carga por contacto, el conductor adquiere cargas de igual signo a las del objeto inicialmente cargado.

positivas de la barra saltando hacia ella y ocupando el lugar vacante en cada átomo. De esta manera el átomo vuelve a su estado neutro desapareciendo simultáneamente el electrón libre y el ión positivo de la barra como portadores de carga independientes. Debido a que algunos electrones del metal pasan a la varilla, ambos objetos tendrán cargas en exceso de igual signo observándose repulsión entre ellos.

Si la carga de la barra es negativa, los electrones en exceso estarán disponibles para ocupar los lugares vacantes en átomos de la superficie del metal. Cuando los materiales llegan a tocarse, electrones de la barra saltan hacia el péndulo.

El resultado final es el mismo, repulsión entre los objetos, aunque en este caso el péndulo se carga negativamente (video).

En los esquemas, representamos a las cargas en exceso en “posiciones fijas". Si la carga en exceso es negativa, habrá mayor cantidad de electrones moviéndose en las regiones donde esquematizamos a las cargas fijas mientras que si el exceso de cargas es positivo los electrones tratarán de no encontrarse en estas regiones.

Carga del electroscopio por contacto

En la secuencia de la figura adjunta se muestra la carga por contacto de un electroscopio utilizando una barra cargada positivamente. Acercando la barra al instrumento, en la parte superior se inducen cargas de signo opuesto al de las cargas de la barra. Las láminas se desvían debido al exceso de cargas en las mismas, de igual signo a las cargas de la barra (Fig.1.13a). Haciendo contacto entre la barra y el electroscopio, se neutralizan las cargas en exceso en la parte superior del mismo sin modificarse la cantidad de cargas en las láminas ni su desviación (Fig.1.13b). Al retirar la barra, las cargas en exceso se redistribuyen por las partes metálicas del instrumento (Fig.1.13c) **(video)**.

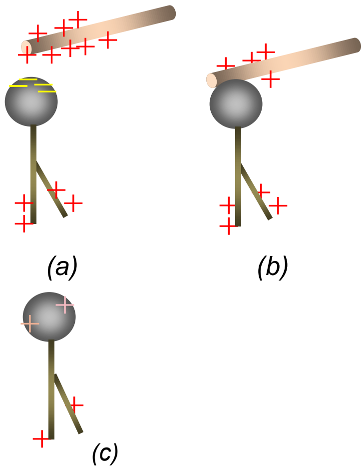


Fig.1.13

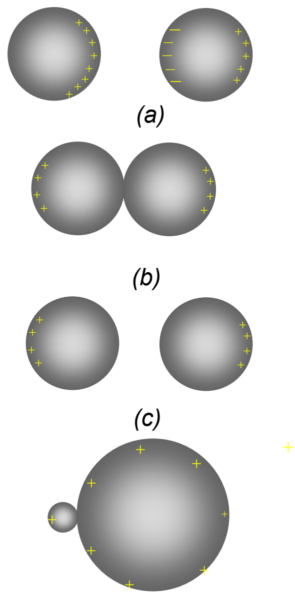
Transferencia de carga entre objetos metálicos

Además de cargar un conductor a partir de un aislante cargado eléctricamente, se puede cargar eléctricamente un cuerpo metálico neutro haciendo contacto con otro objeto metálico cargado eléctricamente.

Desde el punto de vista de las cargas en exceso, dos cuerpos conductores en contacto pueden considerarse como un único objeto metálico de tamaño mayor donde las cargas tienen más espacio para ubicarse. Por ser mayor la superficie disponible, el cuerpo inicialmente descargado se cargará a expensas de la carga cedida por el otro.

Mediante algunas simplificaciones, se puede tener noción del reparto de cargas entre los mismos.

Si tienen diferente tamaño, el más grande podrá contener con más facilidad una cantidad mayor de cargas en exceso.



(d)

Fig.1.14

Se debe observar que aún tratándose de esferas, al no estar aisladas la distribución de cargas en las mismas no es uniforme.

Descarga de un conductor cargado

Cuando se une un cuerpo conductor cargado a otro conductor de muy grandes dimensiones, prácticamente toda la carga pasa al de mayor tamaño quedando el de menor de tamaño sin cargas en exceso. Esto es lo que sucede en la descarga de un cuerpo conductor al tocarlo con la mano o establecer un camino conductor hacia el piso. Este hecho se denomina “descarga a tierra”.

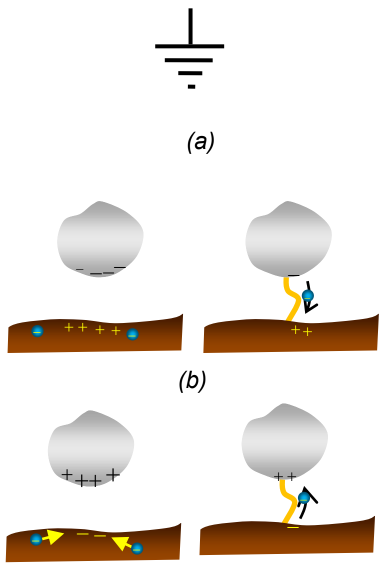
Si el cuerpo inicialmente está cargado con carga negativa, se inducen cargas positivas en el terreno (fig.1.15b). Al establecer un camino conductor, los electrones en exceso abandonarán al objeto bajando a tierra, que es un conductor de grandes dimensiones respecto a la de los objetos utilizados.

Contrariamente, si el objeto está cargado positivamente, al establecerse un camino a tierra suben electrones hasta cancelar las cargas en exceso (fig.1.15c).

Uniendo momentáneamente el objeto cargado con tierra mediante un hilo conductor, electrones fluyen desde o hacia el terreno neutralizando la carga en exceso (descarga).

El cuerpo humano permite el movimiento de electrones libres, de modo que tocando con la mano al conductor cargado, también se logra descargarlo a tierra. Dependiendo de la cantidad de carga en exceso, esta operación puede ser peligrosa.

La humedad sobre los objetos cargados constituye un camino conductor hacia la Tierra. Por este motivo, la realización de las experiencias de electrostática requiere ambientes secos (video).



(c)

Fig.1.15

Carga de un conductor por inducción

Además de transferir carga a un conductor mediante el contacto eléctrico con un objeto cargado, se lo puede cargar eléctricamente por inducción.

La secuencia siguiente muestra los pasos a seguir para cargar la esferita del péndulo por inducción. Para la situación presentada, las cargas positivas de la barra atraen a los electrones sobre la cara de la esferita que enfrenta a la varilla (fig.1.16a). Para indicar la atracción entre cargas de signos opuestos, se dibujaron líneas entre ellas (fig.1.16b).

En fig.1.16c se indica la conexión a tierra en la base de la esferita colgada del péndulo. La puesta a tierra se puede realizar tocando momentáneamente con la mano la esfera a cargar, en presencia de la barra inductora. ¿Dependerá el resultado obtenido del punto donde se realice esta conexión?

Al desaparecer las cargas positivas en exceso en el lado izquierdo, la esfera queda cargada negativamente.

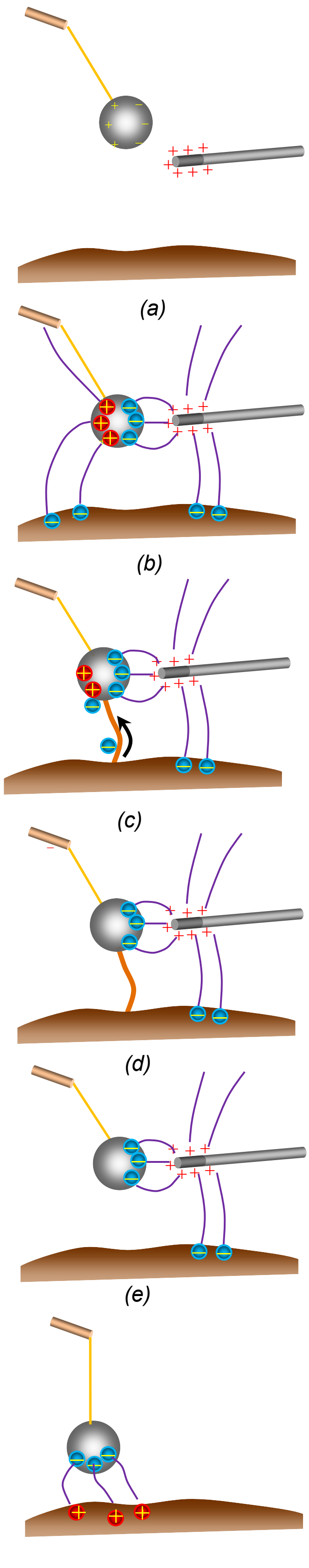
Los electrones en exceso en la esfera (fig.1.16d) no bajan a tierra por estar fuertemente sostenidos por la atracción ejercida por las cargas positivas de la barra. Por este motivo, el resultado es el mismo independientemente del punto donde se realice la conexión a tierra.

Cuando se quita la conexión a tierra, debido a que todas las cargas con libertad de movimiento están fijas en su posición por las fuerzas ejercidas por cargas de signos opuestos, no se produce un desplazamiento de las mismas (fig.1.16e).

Al retirar la barra cargada desaparecen las fuerzas ejercidas por la misma sobre las cargas en exceso en el péndulo, que se reubicarán hasta alcanzar la nueva posición de equilibrio (fig.1.16f).

Debido a la existencia de objetos cerca de la esferita cargada, la distribución de cargas sobre la superficie de la misma no será uniforme como sería en caso de encontrarse aislada.

Dependiendo del tipo de carga de la barra, portadores de signo opuesto irán a tierra o subirán desde tierra dejando al péndulo con exceso de cargas de signo opuesto a la barra inductora.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Fig.1.16

Carga del electroscopio por inducción

En este caso la barra no llega a tocar al instrumento (fig.1.17a). Al unir la parte metálica del electroscopio a tierra, se neutralizan las cargas del mismo signo que las de la barra. Para que esto ocurra, la barra inductora debe mantenerse sobre el instrumento mientras está conectado con la tierra (fig.1.17b). Debido a que desaparecen las cargas en exceso en las láminas, no se observa desviación de las mismas. Lo mismo ocurre cuando se retira la conexión a tierra, manteniendo la barra inductora (fig.1.17c).

Finalmente, al retirar la barra inductora, como en el caso anterior se observará desviación de las láminas, aunque en este caso la carga adquirida será de signo opuesto al de las cargas de la barra inductora (video).

A partir de la misma barra cargada, cargando un electroscopio por contacto y otro por inducción, se puede comprobar que al ponerse en contacto cargas de diferente signo, neutralizan sus efectos (video).

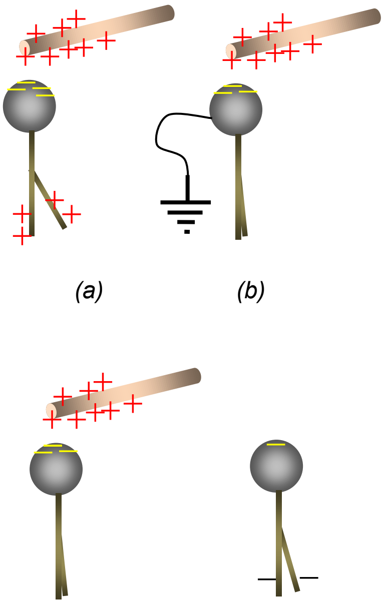


Fig.1.17

Ley de Coulomb

En 1785 Charles Coulomb determinó experimentalmente la fuerza entre dos cargas puntuales q_1, q_2 separadas una distancia d, llegando a una expresión similar a la propuesta cien años antes por Newton para la atracción entre masas puntuales (video).

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

La dirección está determinada por la recta que pasa por ambas cargas y el sentido es de repulsión si ambas cargas son de igual tipo y atracción si son de signo diferente.

La constante de proporcionalidad depende del sistema de unidades utilizado.

En el Sistema Internacional de Medidas, SI, la unidad de carga eléctrica es el culombio, C, resultando la constante:

$$c^2 10^{-7} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \kappa_e \simeq 9x10^9 \left(\frac{Nm^2}{C^2}\right)$$

Siendo c=3x10^{8}m/s la velocidad de la luz en el vacío, κ_e se denomina constante de Coulomb y ε_0 permitividad del vacío (video).

Calculando la fuerza con que se repelen dos cargas puntuales, separadas un metro y cargada cada una con un Coulomb, se puede comprobar que esta es una cantidad enorme de carga eléctrica.

La partícula cargada más pequeña que se encontró en la naturaleza es el electrón. Su carga es negativa y su valor es 1,602 x 10^{-19} C. Las cargas de las demás partículas, positivas o negativas, tienen el mismo valor o un múltiplo del valor de la carga del electrón.

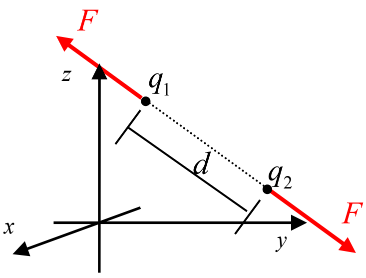


Fig.1.18

La expresión de la fuerza entre dos cargas puntuales es semejante a la correspondiente a la atracción entre dos masas puntuales. Esta fuerza es directamente proporcional al producto entre las masas (cargas) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas estando su dirección sobre la recta que une a las mismas. Esta última característica es la que permite asegurar que las fuerzas eléctricas, como las ejercidas entre masas, son fuerzas conservativas. La única diferencia entre ambas es que, mientras que las fuerzas entre masas siempre son de atracción, las fuerzas eléctricas son de atracción cuando se ejercen entre cargas de diferente signo y de repulsión en el caso en que las cargas sean del mismo signo. Esta similitud lleva a considerar que un objeto cargado produce una modificación de las propiedades del espacio que lo rodea de manera similar a como ocurre con el campo gravitatorio.

Debido a que nuestra existencia transcurre bajo los efectos de la atracción ejercida por la Tierra, es bastante simple asociarla con el campo gravitatorio terrestre. La modificación de las propiedades espaciales originada por la presencia de cargas eléctricas, recibe el nombre de campo eléctrico.

La comparación entre las fuerzas debidas a las cargas eléctricas y las generadas por las masas de dos electrones o de dos protones, pone de manifiesto la enorme magnitud de las fuerzas bajo estudio. El motivo por el que se obtienen resultados correctos para la descripción del movimiento de los cuerpos mediante las leyes de la mecánica sin considerar las fuerzas eléctricas, se justifica considerando la neutralidad de carga de los objetos. Por otra parte, la enorme cantidad de masa de los planetas requiere un exceso de carga considerable en los mismos para que los efectos de las mismas sean apreciables.

El campo eléctrico

En fig.1.19a además de mostrar líneas semejantes a banditas elásticas entre cargas representando que cada una “tira” de otra con signo opuesto, se indica con un vector la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba positiva colocada en un punto P cualquiera de la región. Esta fuerza es proporcional al valor de la carga puntual y al efecto producido por el cuerpo cargado, con una dirección asociada.

Si la posición de las cargas en la barra y péndulo no se modifica por la presencia de la carga de prueba, el efecto ejercido sobre el punto P no cambia si se quita esta última (fig.1.19b), pudiéndose concluir que las propiedades del espacio que rodea a los objetos cargados se modifican de manera tal que al colocar en un punto cualquiera una carga puntual, aparece sobre la misma una fuerza eléctrica que depende del valor de esta carga y de la influencia ejercida en ese punto del espacio por los objetos cargados.

La situación es similar a la del campo gravitatorio donde la aceleración gravitatoria, cuya existencia en una región del espacio es independiente de la existencia o no de una masa en dicha región, tiene en cuenta el efecto que ejerce la masa de la Tierra sobre cada punto del espacio.

Al colocar un objeto, la fuerza sobre el mismo será proporcional a su masa y a la aceleración de la gravedad en esa ubicación, coincidiendo su dirección y sentido con la del campo gravitatorio en ese punto (fig.1.20).

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

De manera similar, la región en la que se ejerce una fuerza sobre una carga eléctrica, se conoce con el nombre de campo eléctrico.

El campo eléctrico es el campo de valores vectoriales que representa la influencia ejercida por cargas eléctricas y se define como la fuerza eléctrica ejercida por unidad de carga.

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}_e}{q}$$

Conocido el campo eléctrico en un punto cualquiera P, la fuerza sobre una carga de prueba puntual q colocada en dicho punto estará dada por la expresión

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

La carga de prueba utilizada debe ser tan pequeña como sea posible para no modificar la distribución de cargas que origina al campo eléctrico.

En el S.I. de medidas la unidad de campo eléctrico es N/C aunque como se verá, es más utilizado el V/m (voltio/metro) como unidad para esta magnitud.

En situaciones electrostáticas se supone que las cargas se encuentran fijas, es decir cada partícula con carga eléctrica se encuentra unida rígidamente al punto en que se la

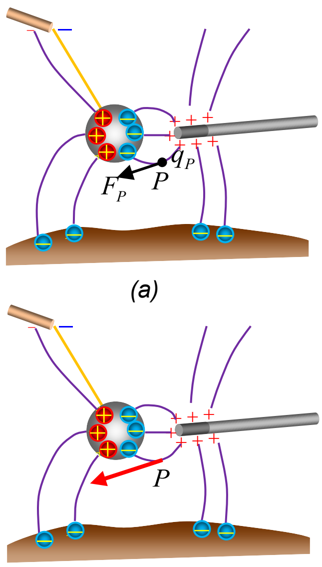


Fig.1.19

Para considerar la atracción entre cargas de signos opuestos, se agregan líneas imaginarias entre ellas, similares a bandas elásticas

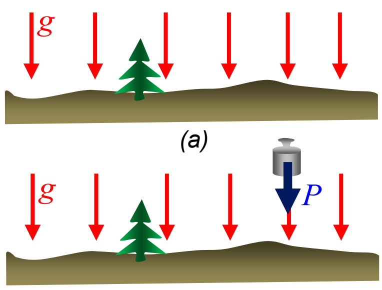


Fig.1.20

considera ubicada. Desde este punto de vista, la consideración de carga de prueba extremadamente pequeña no es necesaria.

En un caso real, cada partícula formando parte de la materia, se ubica a partir de las fuerzas originadas por las demás partículas. Si se trata de un aislante, un campo eléctrico externo deformará los orbitales sin llegar a arrancar electrones del dieléctrico mientras que si se trata de un conductor, sus electrones libres indefectiblemente se moverán por efecto del campo externo, debiéndose considerar una carga de prueba prácticamente nula para que no exista redistribución de cargas en el material.

ACTIVIDADES

1.1 Las siguientes cuestiones ayudan a comprender el proceso de descarga a tierra.

a) ¿Por qué un cuerpo metálico, esférico aislado y con carga neta tiene distribución superficial de carga uniforme?

b) Considere dos esferas metálicas idénticas identificadas con 1 y 2, la esfera 1 está inicialmente cargada mientras que 2 es eléctricamente neutra. Suponga que primero se las pone en contacto y luego se las separa. ¿Habrá desplazamiento de cargas durante este proceso? ¿Se modifica la carga total del sistema? ¿Cómo resultarán comparativamente las cargas finales de ambas esferas?

c) Responda el inciso b) considerando que la esfera 2 tiene radio varias veces superior al de la esfera 1.

d) Indique el sentido en que se mueven los electrones (portadores móviles) para los casos de fig.1.21 cuando se cierra la llave que conecta a tierra los objetos cargados.

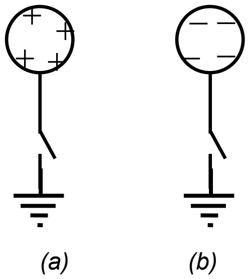


Fig.1.21

1.2 Dos péndulos sostenidos por soportes aislantes se encuentran descargados. Utilizando una barra no conductora cargada, se procede a cargar un péndulo por contacto y el otro por inducción. Al acercar los péndulos, ¿la fuerza entre ellos será atractiva o repulsiva?

1.3 Describa el procedimiento de carga por contacto de un electroscopio.

1.4 En fig.1.22 se indican los pasos para cargar por inducción un cuerpo metálico inicialmente descargado. Complete cada paso dibujando la distribución aproximada de cargas con su correspondiente signo.

Finalizada la secuencia compare el signo de la carga del cuerpo metálico con el de la carga de la barra inductora.

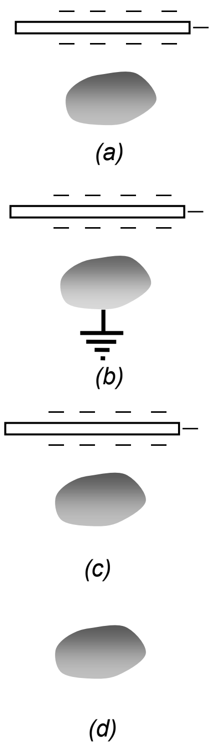


Fig.1.22

1.5 Considere un electroscopio neutro.

a) Explique por qué las hojuelas se separan cuando se mantiene una barra cargada próxima al mismo.

b) Estando en las condiciones de a), ¿Por qué se cierran las hojuelas al conectar el electroscopio a tierra?

c) Manteniendo la barra cargada en su posición se quita la conexión del electroscopio a Tierra ¿Qué sucede con su indicación? ¿Queda cargado con carga de igual signo a la de la barra, de signo opuesto o descargado?

d) En fig.1.17b ¿qué ocurre si estando conectado el electroscopio a tierra se retira la barra inductora?

1.6 En fig.1.23 se representan dos objetos metálicos A y B.

A está cargado con carga –Q y B es eléctricamente neutro.

a) Represente sobre el esquema agregando + o – según corresponda la distribución aproximada de cargas en ambos cuerpos. Explique por qué supone tal distribución.

b) Suponga que B se une momentáneamente a Tierra y luego se desconecta. Indique y justifique la nueva distribución de cargas.

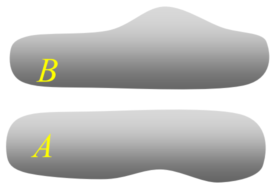


Fig.1.23

1.7 Dos esferas metálicas idénticas, eléctricamente neutras y sostenidas por soportes aislantes, se encuentran suficientemente próximas como para llegar a tocarse. En estas condiciones se acerca una barra cargada sin llegar a tocarlas (fig.1.24a). En presencia de la barra se separan (fig.1.24b) y luego se retira la barra (fig.1.24c). La fuerza eléctrica entre las esferas ¿será de atracción, repulsión o nula? Esquematice la situación indicando en cada caso la distribución de cargas.

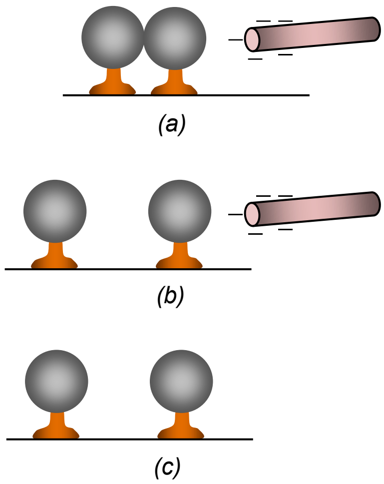


Fig.1.24

1.8 Al acercar un peine frotado en el cabello seco se observa una desviación del delgado hilo de agua que sale de una canilla. Intente una explicación a este fenómeno.

1.9 Dos esferas idénticas (rotuladas con 1 y 2) tienen igual carga y se mantienen en posiciones fijas a una distancia grande comparada con sus diámetros. Las mismas se repelen con una fuerza de 100 N. Otra esfera identificada como 3, idéntica a las anteriores y sostenida mediante un mango aislante, está inicialmente descargada.

Se acerca 3 a 1 hasta que lleguen a tocarse. Sin descargar la esfera 3, se toca con ella a la esfera 2. Finalmente se retira la esfera 3 quedando solamente las dos primeras. ¿Qué valor tendrá la fuerza entre las esferas al final del proceso?

1.10 En fig.1.25 se esquematiza el corte de un recipiente metálico hueco en el que se introduce una esferita metálica inicialmente cargada con carga positiva y sostenida por un mango aislante. Complete la secuencia agregando las cargas en exceso en el recipiente. ¿Estará cargado el recipiente al retirar la esferita? Si su respuesta es afirmativa indique el signo de la misma, en caso contrario justifíquela.

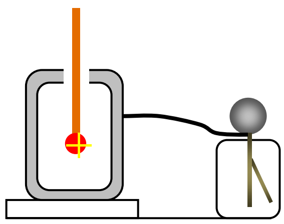
1.9) Analice como se reparten las cargas entre dos esferas metálicas idénticas en contacto y tenga en cuenta que la fuerza entre dos cargas puntuales es proporcional al producto entre sus magnitudes.

1.11 Una placa aislante cargada negativamente después de haber sido frotada con un paño seco yace sobre una mesa. Se acerca a la misma una placa metálica sostenida mediante un mango aislante y sin que lleguen a tocarse, se toca con un dedo momentáneamente la placa metálica.

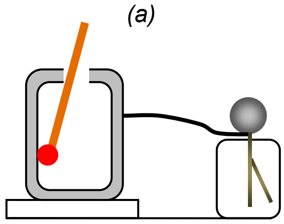
a) Esquematice la situación y explique si la placa metálica se carga eléctricamente.

b) Se lleva la placa metálica hacia el interior de un recipiente metálico hueco hasta que toque las paredes internas del mismo. Explique si alguno de estos objetos posee carga eléctrica en exceso y de ser así, indique su signo.

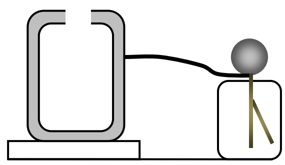
c) Se posiciona nuevamente la placa metálica sobre la aislante y se repiten las operaciones anteriores. ¿Se modificará la cantidad de carga en exceso del recipiente hueco?



(a)



(b)



(c)

Fig.1.25

1.12 Experimentalmente se determina que una muestra de cobre posee $8{,}47x10^{28}$ electrones por metro cúbico. Suponiendo que existe un electrón libre por átomo, que los mismos tienen forma esférica y se ubican uno al lado del otro en todo el volumen, estime el radio atómico correspondiente.

1.11b) Como ocurre en un conductor macizo, las cargas en exceso en un conductor hueco se ubican sobre la superficie externa del mismo.

c) Las cargas en exceso en la placa tratan de escapar de ella.

1.13 En uno de sus experimentos, R..A.Millikan en 1911 observó que cuando cargaba un cuerpo aparecían las siguientes cargas: 6,563 8,204 11,5 13,13 16,48 y 18,08 $x10^{-19}C$ ¿Qué valor puede deducirse de estos datos para la carga elemental?

1.14 Dos cargas puntuales de 1C y signos opuestos se disponen a un metro de distancia como se indica en fig.1.26. Para mantenerlas en su posición, se colocan pesas de 1000t en el plato de la balanza ¿Cuántas pesas se necesitan para mantener a las cargas en su posición?

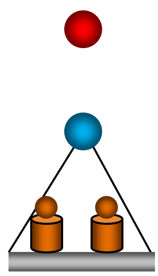


Fig.1.26

1.15 a) Considerando a la Tierra y Luna como partículas de $5,9x10^{24}\ Kg$ y $7,3x10^{22}\ Kg$ de masa, determine la relación entre las fuerzas de atracción eléctrica y gravitatoria entra ambas, considerando que se traslada una carga de 1C desde la Tierra a la Luna. ($G = 6,67x10^{-11}\ Nm^2 / kg^2$)

b) ¿Qué cantidad de carga tendría que trasladarse para que la fuerza eléctrica sea un millón de veces inferior a la gravitatoria?

1.16 En fig.1.27 se muestra otra forma de comprobar que en un recipiente metálico hueco la carga en exceso se distribuye en la superficie externa del mismo. Considerando que la esferita sostenida por un mango aislante es metálica cargada positivamente, complete la secuencia agregando las cargas en exceso en el recipiente metálico hueco.

¿Estará cargado el recipiente al retirar la esferita?

Si su respuesta es afirmativa indique el signo de la misma, en caso contrario justifíquela.

Sin descargar la esferita ¿Qué sucederá si se la introduce nuevamente y llega a tocar la pared interna del recipiente?

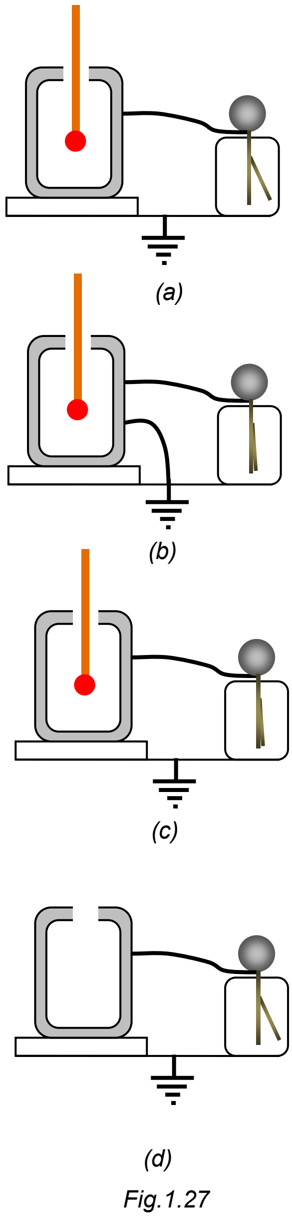


Fig.1.27

1.17 Considere dos electrones separados entre sí por una distancia de un metro.

a) Calcule la fuerza de repulsión eléctrica entre ambos.

b) Calcule la atracción que ejerce la Tierra sobre cada uno de los electrones del inciso a) considerando que los mismos se encuentran a nivel de la superficie terrestre.

c) Determine la relación porcentual entre las magnitudes de las fuerzas calculadas en b) y en a).

d) Calcule la distancia a la que se debe separar a los electrones para que la magnitud de fuerza eléctrica entre ellos iguale la atracción gravitatoria calculada en b).

1.18 La luz que nos llega desde el Sol es un ejemplo de radiación electromagnética formada por campos eléctricos y magnéticos oscilando muy rápidamente. Un valor típico de la amplitud de oscilación del campo eléctrico que alcanza la superficie terrestre puede ser $500\ \mathrm{NC/m^2}$ (500 V/m). Por otra parte, en los equipos cuyos principios de funcionamiento se basan en campos eléctricos, la magnitud de estos puede

llegar hasta $10^5\ (V\ /\ m)$.

a) Calcule la intensidad del campo eléctrico que un electrón ejerce sobre el otro para la situación presentada en el ejercicio 1.17.

b) Determine la relación porcentual entre el peso del electrón y la fuerza eléctrica a la que estaría sometido si el campo eléctrico en la región donde se encuentra es de 1000 V/m.

c) Analizando los resultados de este ejercicio y del anterior podrá comprender el motivo por el que en la mayoría de las aplicaciones en las que las cargas se mueven en una región en la que existe campo eléctrico no se tiene en cuenta la atracción gravitatoria.

1.18b) Relación porcentual:
(Fg/Fe)x100%

CAPÍTULO 2

CARGAS EN REPOSO

ELECTROSTÁTICA

Al frotar una barra aislante con un paño, cuanto más enérgica sea la acción de frotamiento mayor será la cantidad de carga separada disponible para su utilización. Depositándolas en un objeto metálico, se distribuyen hasta alcanzar la posición de equilibrio en la que permanecen en reposo a la espera de ser utilizadas. El campo eléctrico que generan es el resultado del trabajo realizado para cargarlo.

Estando establecido el campo en la región, desplazar una carga en contra de la fuerza ejercida por el mismo requiere la realización de un trabajo adicional mientras que, dejándola en libertad será acelerada por acción de la fuerza eléctrica ejercida.

La situación es comparable a la que se tiene con el campo gravitatorio donde el incremento de la energía potencial de un objeto al levantarlo se convierte en energía cinética al soltarlo. En estas condiciones, el campo gravitatorio es un campo conservativo, pudiéndose asociar una parte de la energía de los objetos a la posición que ocupan en el campo, conocida como energía potencial gravitatoria.

El carácter conservativo del campo gravitatorio se debe a que la dirección de fuerza de atracción entre masas puntuales coincide con la recta que pasa por la posición de las mismas.

Por el mismo motivo puede utilizarse el concepto de energía potencial asociada al campo generado por cargas en reposo.

El campo electrostático es originado por cargas fijas y es un campo conservativo. La condición necesaria para ello es que las cargas involucradas estén en reposo. Si se tiene que desplazar alguna carga en el campo, su presencia no debe modificar la posición de las cargas que generan dicho campo.

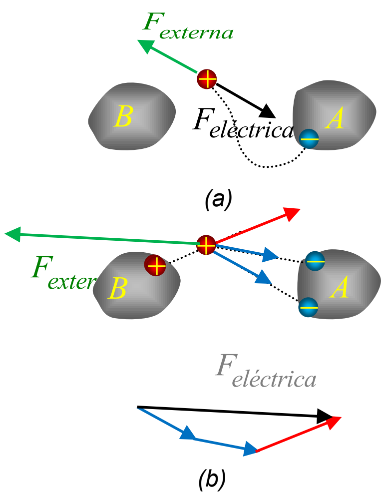


Fig. 2.1

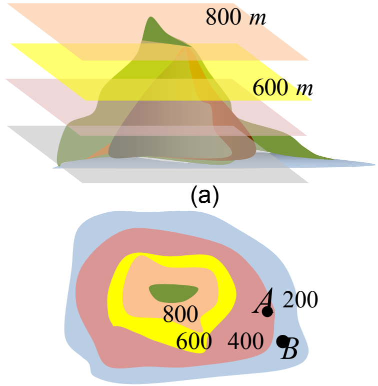
Trasladar una carga desde un objeto A hacia otro B, requiere realizar trabajo contra las fuerzas que ejercen las cargas negativas en exceso en A y las positivas depositadas en B.

A medida que la cantidad de carga trasladada aumenta, es mayor el trabajo necesario para agregar otra.

Para mantener la condición de campo electrostático, la carga en movimiento además de ser suficientemente pequeña para no modificar el campo, debe trasladarse muy lentamente y sin aceleración para no generar campos electromagnéticos adicionales. Para esto, la fuerza aplicada debe ser igual y opuesta a la que realiza el campo.

Energía potencial eléctrica

Los mapas utilizados en cartografía indican el nivel de las diferentes regiones respecto de uno tomado como referencia, generalmente el nivel del mar. Como las alturas involucradas en los mismos son pequeñas frente al radio de La Tierra, se puede suponer que la aceleración de la gravedad es la misma para todos los puntos y de esta manera las curvas de nivel también representan curvas de igual energía potencial. Así, lazando un objeto desde un punto A (fig.2.2b) es posible conocer la energía cinética que tendrá cuando impacte contra el piso, por ejemplo en B.

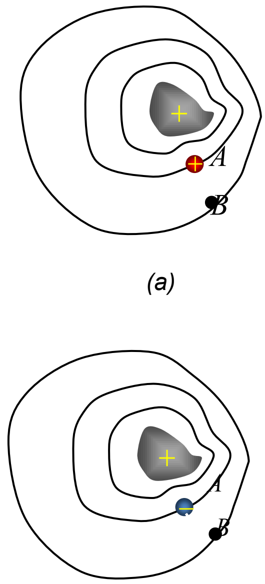


(b)

Fig.2.2

De manera similar el trabajo realizado para posicionar una partícula cargada en una región de campo electrostático, se convertirá en energía cinética cuando la misma recupere la libertad.

En fig.2.3 se esquematiza una situación análoga a la mostrada en fig.2.2 para una región de campo eléctrico en torno a un objeto cargado positivamente. Una carga de prueba positiva será repelida por el objeto cargado. Por este motivo, la energía potencial de la misma será mayor en A que en B, tal como sucede para el campo gravitatorio de fig.2.2b.



(b)

Fig.2.3

Diferente es la situación para la energía potencial de partículas con carga negativa. En fig.2.3b se coloca en A una carga negativa, que es atraída por el objeto cargado positivamente. Así, cuando más cercana a él se encuentre menor será su energía potencial, contrariamente a lo que sucede para la carga de prueba positiva.

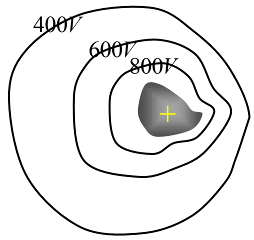
Como podrá comprenderse, no es posible lograr una única representación de la energía potencial para ambos tipos de cargas eléctricas colocadas en una región en la que existe un campo electrostático. Sin embargo es posible independizarse del signo de la carga puntual si se considera la energía potencial por unidad de carga. Esta magnitud, denominada diferencia de potencial eléctrico, depende solamente de las cargas fijas que originan el campo electrostático y es independiente del signo de la carga puntual colocada en el mismo.

Diferencia de potencial eléctrico

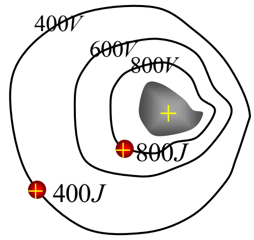
Se denomina diferencia de potencial entre dos puntos a la diferencia de energía potencial eléctrica por unidad de carga entre los mismos

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q} = \frac{W_{A\to B}}{q} \qquad \textit{ecs.2.1}$$

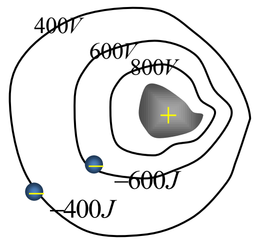
El SI define el Voltio como unidad de medida de diferencia de potencial eléctrico. La diferencia de potencial entre dos puntos del espacio es de un voltio cuando, para trasladar de un punto al otro una carga de un culombio, se debe realizar un trabajo de un Julio.



(a)



(b)



(c)

Fig.2.4

En fig.2.4a se dibujaron líneas, similares a los mapas de nivel, representando la diferencia de potencial con respecto al correspondiente para puntos muy alejados. Colocando una carga en la región, su energía potencial eléctrica se obtiene multiplicando el valor de la carga por el potencial correspondiente. En fig.2.4b se representa la energía potencial para una carga positiva de 1C mientras que en fig.2.4c corresponde a una carga negativa del mismo valor. De esta manera, la representación de fig.2.4a permite determinar la energía potencial para cargas de ambos tipos y de cualquier magnitud

En fig.2.5 se muestra la trayectoria seguida para trasladar una carga q en una región de campo electrostático desde A hasta B, pasando por un punto R.

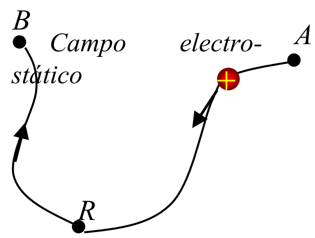


Fig.2.5

De acuerdo con la definición de diferencia de potencial:

$$\frac{W_{A\to R}}{q} = V_R - V_A$$

$$\frac{W_{R\to B}}{q} = V_B - V_R$$

Si el trayecto de A hacia B incluye el pasaje por R, se tiene:

$$\frac{W_{A\to B}}{q} = \frac{W_{A\to R} + W_{R\to B}}{q}$$

Que puede verificarse de la siguiente manera:

$$V_B - V_A = \left(V_R - V_A\right) + \left(V_B - V_R\right)$$

Independientemente de la elección del punto tomado como referencia, la diferencia de potencial entre dos puntos es única.

La existencia de potencial eléctrico es independiente de la carga de prueba. De igual forma que el campo eléctrico, el potencial es una propiedad del espacio. Si no hay carga de prueba no hay fuerza pero sigue existiendo campo y potencial.

En fig.2.6 se representa la intersección de superficies equipotenciales con el plano del dibujo, para una región en la que existe un campo electrostático.

Todos los puntos de estas superficies tienen igual diferencia de potencial respecto a una referencia común, infinitamente alejada de los objetos considerados. En este caso el potencial de puntos sobre la línea diagonal coincide con el potencial de referencia.

A modo de ejemplo, si se suelta desde el reposo en el punto P_1 una carga de 3 μC , y la misma sigue una trayectoria tal que en determinado instante pasa por el punto P_2 , considerando que se mantienen las condiciones electrostáticas, la energía cinética de la misma en ese punto será de 150 μJ . Por otra parte, si en P_2 se libera desde el reposo una carga de -4 μC , chocará con el objeto cargado positivamente con energía igual a 360 μJ (video).

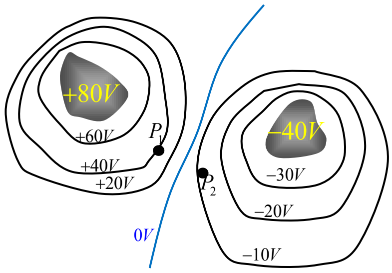


Fig.2.6

Así como en ausencia de rozamiento no realizamos trabajo al desplazarnos sobre la superficie terrestre, tampoco se realiza trabajo al desplazar una carga sobre una superficie equipotencial porque la fuerza sobre la carga de prueba es perpendicular a la superficie en todos sus puntos.

Representación del campo eléctrico

El campo eléctrico se puede representar mediante un conjunto de líneas, similares a las dibujadas en fig.1.19. Las mismas representan para cada punto, la dirección que tendría la fuerza si en ese punto se coloca una carga de prueba positiva. Donde el campo es más intenso las líneas se dibujan más próximas entre sí, separándose a medida que la magnitud del campo disminuye. La intensidad del campo eléctrico está representada por la cantidad de líneas por unidad de superficie del dibujo.

En fig.2.7 se considera una línea de campo sobre la que se coloca una carga de prueba, pudiéndose comprobar que se debe realizar trabajo para trasladar una partícula cargada positivamente contra de la dirección del campo (fig.2.7a), incrementando la energía potencial de la partícula.

Si se traslada una carga negativa, debe realizarse trabajo para desplazarla en la misma dirección del campo (fig.2.7b). Como se trata de un aumento de la energía potencial pero la carga es negativa, se puede concluir diciendo que el potencial disminuye en el sentido del campo.

Desplazar una carga positiva normalmente a la superficie equipotencial en sentido contrario al del campo requiere la realización de mayor cantidad de trabajo. Si se desplaza una carga negativa en el sentido del campo, el trabajo realizado será máximo.

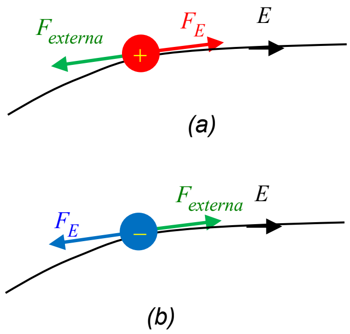


Fig.2.7

Relación entre el campo y el potencial eléctrico

La fig.2.8 repite la situación de fig.2.1. En la misma se indica con $F_{externa}$ a la fuerza que debe realizarse sobre la carga de prueba para trasladarla de un objeto al otro contra la fuerza ejercida por el campo eléctrico, $F_{eléctrica}$.

El potencial aumenta en sentido contrario al del campo

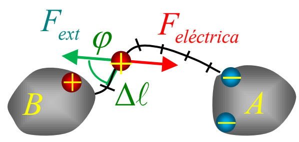


Fig.2.8

Para mantener las condiciones electrostáticas el traslado debe realizarse sin aceleración de la partícula cagada, de modo que la fuerza resultante sobre la misma debe ser nula.

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{eléctrica}$$

El cálculo del trabajo necesario para trasladar una carga positiva desde A hasta B siguiendo una trayectoria cualquiera se realiza dividiéndola en N tramos elementales de longitud $\Delta\ell$.

Para cada uno de estos tramos el trabajo realizado está dado por el producto entre la componente de la fuerza aplicada en dirección de la trayectoria seguida y la longitud del tramo recorrido.

$$\Delta W = F_{ext} \Delta\ell \cos\varphi$$

Este resultado corresponde al producto escalar entre los vectores representativos de la fuerza y el desplazamiento:

$$\Delta W = \vec{F}_{ext} . \Delta\vec{\ell} = -\vec{F}_{eléctrica} . \Delta\vec{\ell}$$

El trabajo por unidad de carga realizado es la diferencia de potencial entre los extremos del segmento elemental recorrido:

$$dV = -\vec{E} d\vec{\ell}$$

En equilibrio electrostático, la componente del campo tangente a la superficie del conductor es nula. Para cualquier tramo entre A y B de una curva perteneciente a la superficie equipotencial, el campo y la trayectoria seguida son perpendiculares.

El producto escalar del segundo miembro es igual al producto entre la componente del campo tangente al tramo elemental considerado y la longitud del mismo. Esta expresión indica que si nos movemos en dirección tal que exista una componente no nula del campo eléctrico, observaremos una variación en el potencial y que la máxima variación de potencial se obtiene para desplazamientos en la dirección del campo:

$$\Delta V_{máx} = -E\Delta\ell$$

La misma conduce a un método para determinar la magnitud del campo eléctrico en un punto cualquiera de una región.

Midiendo la diferencia de potencial entre el punto considerado y diferentes puntos a la misma distancia $\Delta\ell$ a su alrededor, la dirección donde la diferencia de potencial es máxima coincide con la dirección del campo eléctrico. La magnitud y sentido del campo se obtienen de la siguiente expresión:

$$E = -\frac{\Delta V_{máx}}{\Delta\ell} \qquad \text{ecs.2.2}$$

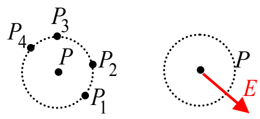


Fig.2.9

Suponiendo que en fig.2.9 la máxima diferencia de potencial se tiene entre el punto P y P_1 o P_4, éstos definen la dirección del campo eléctrico. Si el potencial en P es mayor que en P_1, el sentido del campo es de P hacia P_1.

Superficies equipotenciales

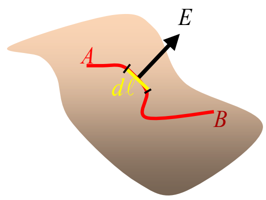


Fig.2.10

En fig.2.10 se representan dos puntos de una superficie equipotencial y un camino cualquiera entre ellos, que yace sobre la superficie. Por tratarse de un equipotencial, el trabajo para cualquier desplazamiento elemental de una carga puntual sobre dicha superficie será nulo. Este resultado solamente se obtiene si el campo es perpendicular a la superficie que contiene a la trayectoria seguida.

Conductores cargados

Los metales, debido a su condición de conductores de la electricidad, presentan ciertas características que permiten anticipar la distribución de equipotenciales y líneas de campo eléctrico. Esta representación, que será utilizada para explicar el funcionamiento de algunos dispositivos, también permite comprobar los resultados obtenidos al utilizar las expresiones de cálculo correspondientes.

Si existe campo eléctrico en el interior de un conductor (fig.2.11a), existe una fuerza eléctrica que reubica a los electrones libres (fig.2.11b) dejando igual exceso de cargas positivas en la posición que ocupaban previamente.

El desplazamiento de cargas continúa hasta que el campo por ellas generado cancela al supuesto inicialmente anulando la fuerza sobre los portadores libres (fig.2.11c).

Para dibujar de manera aproximada la intersección de superficies equipotenciales con el plano del dibujo, se debe tener en cuenta que un conductor cargado es un equipotencial y por tanto las líneas de campo son perpendiculares al mismo, ubicándose en la parte externa del conductor cargado.

Como es más intenso en las puntas que en las zonas planas, la distancia necesaria para la misma diferencia de potencial se reduce. Por este motivo en las zonas de menor radio de curvatura las líneas de campo se dibujan más próximas entre sí. Salen del conductor si tiene exceso de cargas positivas o terminan en el si está cargado negativamente.

Como resultado, el campo eléctrico en el interior del conductor en equilibrio electrostático es nulo. Si el conductor está cargado, las cargas en exceso permanecen fijas sobre la superficie. En fig.2.12a se indica con círculos rojos algunos átomos de la superficie a los que les falta un electrón por estar el objeto cargado positivamente. Este campo no puede tener una componente sobre la superficie ni estar dirigido hacia el interior del material ya que reacomodaría las cargas (fig.2.12b).

La distribución de las cargas en exceso sobre la superficie depende de la forma del objeto. Puede demostrarse que la intensidad del campo eléctrico en cada punto sobre la superficie del conductor es proporcional a la densidad de carga eléctrica en dicho punto y que en las regiones donde el radio de curvatura es menor (más puntiagudas), la cantidad de carga por unidad de superficie (densidad superficial de carga) es mayor.

Para conceptualizar los diferentes temas a tratar se muestran algunos ejemplos en los que se grafican equipotenciales y líneas de campo.

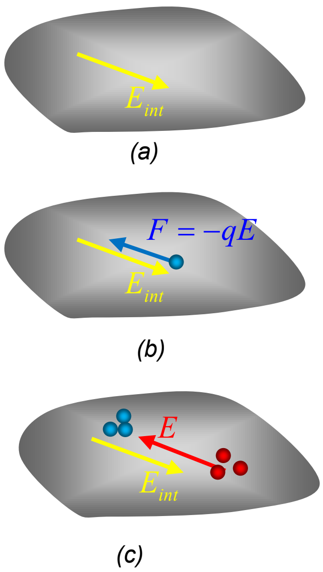


Fig.2.11

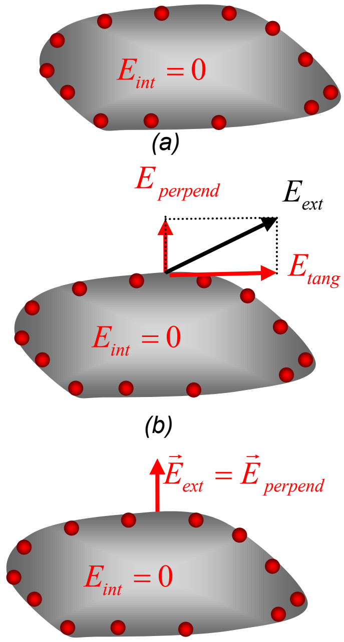


Fig.2.12

Carga puntual

La configuración más simple corresponde a la carga puntual cuyas líneas de campo son radiales y las superficies equipotenciales esferas centradas en la carga. Considerando fija a la carga puntual, la carga de prueba será repelida apartándose hasta que se anula la interacción eléctrica. Frecuentemente se asigna el valor cero para la energía potencial a puntos infinitamente alejados de la distribución de cargas. A medida que, mediante la realización de un trabajo, la carga de prueba es llevada hacia la carga fija, su energía potencial tomará valores positivos cada vez mayores. Si la carga fija es negativa, la carga de prueba positiva será atraída por ella de modo que, asignando el valor cero cuando están infinitamente alejadas la energía potencial disminuye tomando valores cada vez más negativos cuando la carga de prueba se acerca a la carga generadora del campo.

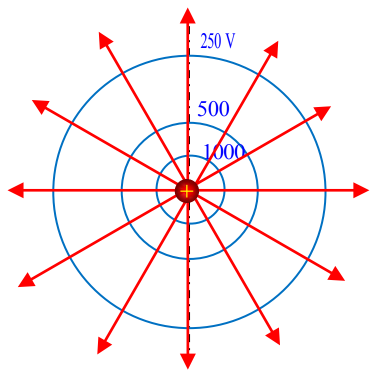


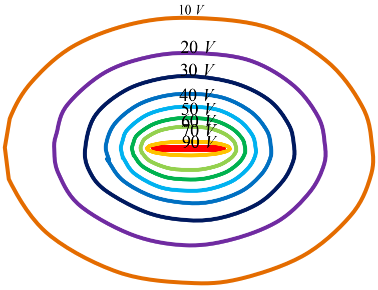
Fig.2.13

Varilla cargada

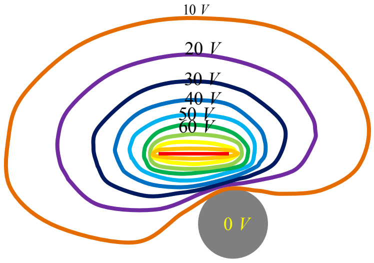
En el capítulo anterior se utilizó una varilla aislante frotada para cargar diferentes objetos. Si la varilla es metálica también se carga eléctricamente al frotarla con un paño, aunque en este caso es necesario sostenerla mediante un mango aislante para que no se descargue a través del cuerpo de la persona que la sostiene. La ventaja de considerar una varilla metálica es que el potencial en todos sus puntos es el mismo y de esta manera se puede realizar una representación de los equipotenciales, como la mostrada en fig.2.14a donde se considera que el potencial de la varilla es 100 V respecto a puntos muy alejados. Puede observarse que cerca de la varilla los equipotenciales toman la forma de la misma y a medida que se consideran puntos más alejados la forma tiende a circunferencias centradas en el objeto. Estas son dos consideraciones a tener en cuenta cuando se pretende bosquejar un diagrama de potenciales eléctricos.

Los equipotenciales de fig.2.14 se realizaron utilizando el método de aproximaciones numéricas comentado en la segunda parte del libro el cual está limitado por la capacidad de cómputo del procesador utilizado. Debido a esta limitación, las representaciones obtenidas en vez de considerar al objeto aislado, corresponden a situaciones en que las líneas de campo y equipotenciales se modifican por la presencia de otros objetos como las paredes, piso y techo de la habitación en que se realiza la experiencia. Las representaciones mostradas se realizaron considerando objetos cuya dimensión máxima es inferior al 10% de las dimensiones de la habitación. En fig.2.14 puede observarse que los equipotenciales están más próximos cerca de las puntas donde la intensidad del campo eléctrico es mayor que en la parte media de la varilla. En fig.2.14b se acerca la varilla a una esfera metálica conectada a tierra (0V). Las líneas equipotenciales se deforman de manera similar a globos alrededor de la varilla aplastados por la esfera.

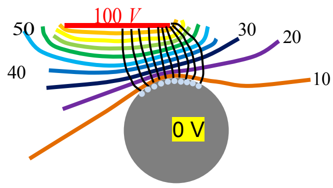
En fig.2.14c se agregaron algunas líneas representando al campo eléctrico en la región donde el mismo tiene mayor intensidad. Estas líneas comienzan en cargas po-



(a)



(b)



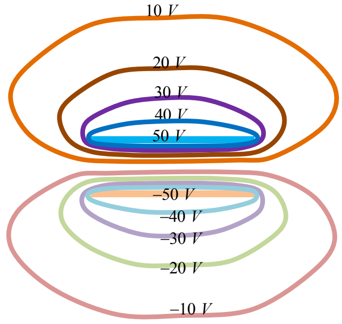
(c)

Fig.2.14

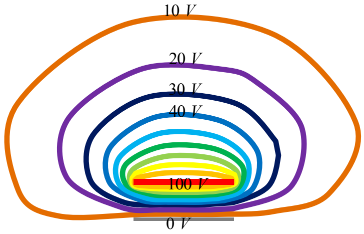
Cualquier objeto de tamaño finito, al ser observado de distancias suficientemente grandes, es visto como un punto. Los equipotenciales son esferas y las líneas de campo radiales y centradas en el objeto.

Cerca del objeto los equipotenciales tienden a tomar su forma.

sitivas sobre la superficie de la varilla y finalizan en cargas negativas sobre la superficie de la esfera próxima a la varilla. En el capítulo 1 se argumentó que electrones libres de la esfera eran atraídos por las cargas positivas de la varilla, dejando exceso de cargas positivas en la parte opuesta de la esfera que, por estar conectada a tierra eran neutralizados por electrones desde ésta.



(a)



(b)

Fig.2.15

Placas paralelas

Otra configuración muy utilizada consiste en dos placas conductoras dispuestas paralelamente. Cuando las placas son de dimensiones finitas, las líneas se distribuyen como se indica en fig.2.15 donde la intersección de las placas con el plano de la figura se reduce a dos rectas paralelas.

Aunque la diferencia de potencial entre placas es 100V, en fig.2.15a las mismas se encuentran a 50V por encima o debajo del potencial de las paredes de la habitación en que se encuentran mientras que en fig.2.15b la placa inferior se ha conectado a tierra, encontrándose así al mismo potencial de la habitación.

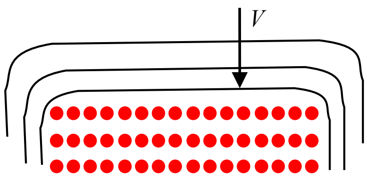
Si bien la distribución de potenciales en la región entre placas no se modifica, la conexión a tierra de una de ellas modifica la influencia ejercida a su alrededor.

En la segunda parte se demuestra que el campo eléctrico sobre la superficie de un conductor cargado es perpendicular a la misma y su valor proporcional a la densidad de carga sobre la superficie.

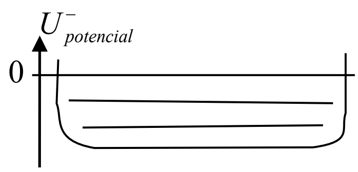
El modelo del conductor

La incorporación del concepto de energía potencial de los electrones libres al modelo simple de un conductor permite explicar de manera conceptual el comportamiento de estos materiales en diferentes situaciones.

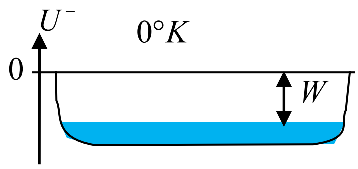
Para un arreglo de iones positivos representativos de la gran cantidad de átomos en la superficie del metal y considerando que están separados entre sí distancias muy pequeñas, la representación de las superficies equipotenciales no será muy diferente de la correspondiente a la varilla cargada, fig.2.14a. En fig.2.16a se muestran algunos equipotenciales y en fig.2.16b diferentes valores de energía potencial para un electrón libre.



(a)



(b)



(c)

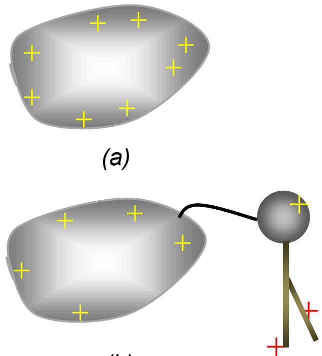
Fig.2.16

El máximo valor de energía potencial para la carga negativa del portador libre, corresponde al electrón cuando está fuera del material y se le asigna el valor cero.

A nivel atómico las leyes de la mecánica clásica dejan de tener validez debiéndose entrar en el campo de la mecánica cuántica. De acuerdo a la misma, la energía de un electrón no puede modificare en forma continua sino por saltos discretos. Por este motivo, en fig.2.16b las líneas horizontales representan valores de energía permitidos para el electrón, no estando permitidos valores intermedios.

Cada nivel de energía disponible puede ser ocupado por un único electrón y cuando existen muchos electrones, los niveles permitidos se agrupan uno junto a otro formando una banda continua de valores posibles.

En el cero absoluto de temperatura, los electrones libres en el conductor ocupan los niveles de energía permitidos por debajo de un valor máximo, denominándose función trabajo o energía de extracción, indicada con W en fig.2.16c, a la menor cantidad de energía necesaria para arrancar un electrón a esta temperatura. En estas condiciones, el modelo para el conductor considera a los electrones libres de un metal eléctricamente neutro moviéndose al azar por efecto de la energía interna del material como si estuvieran en un pozo. En el cero absoluto de temperatura, todos los electrones están por debajo de un nivel, definido por la función trabajo característica de cada material. A medida que la temperatura aumenta adquieren más energía pudiendo en algunos casos, "escapar" del material.



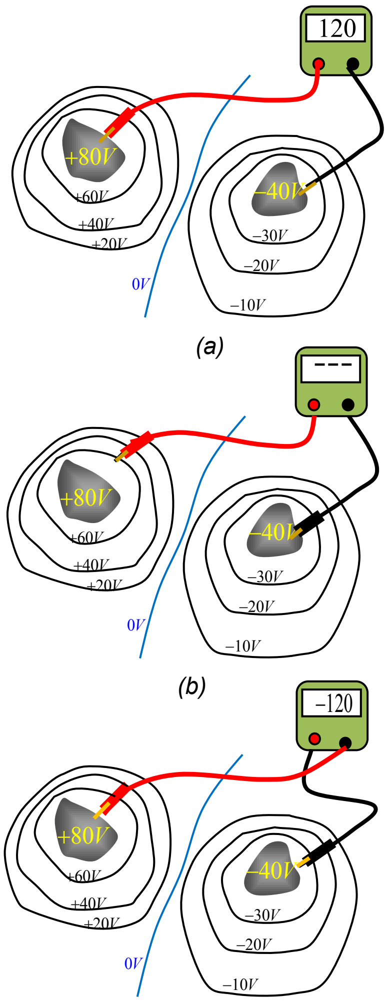
(b)

Fig.2.17

Un electroscopio permite determinar la diferencia de potencial entre el objeto al que está conectado y la mesa o plano sobre el cual el conjunto está apoyado.

Medida de diferencia de potencial eléctrico

Cuando se conecta un electroscopio a un cuerpo metálico cargado, parte de la carga pasa al instrumento hasta que, alcanzado el equilibrio, todos los puntos de los conductores interconectados tienen el mismo potencial. La indicación del instrumento desaparece cuando se descarga estableciendo un camino a tierra. En mayor o menor medida, cuando se utiliza un instrumento para medir una magnitud física, diferencia de potencial en este caso, se produce alguna modificación de la misma.



(c)

Fig.2.18

Un instrumento será tanto más apto que otro cuando menor sea su influencia sobre el valor de la magnitud que está siendo medida.

Un voltímetro es un instrumento especialmente diseñado para medir diferencias de potencial. El mismo consta de dos bornes a los que se conectan las puntas de medida.

El sistema de medidas indica la diferencia de potencial entre uno de los bornes, generalmente indicado con color rojo o con un signo "+" y el otro, de color negro.

En la figura, las puntas de medida del instrumento se ponen en contacto con los objetos metálicos cuya diferencia de potencial se quiere conocer. En fig.2.18a el valor indicado por el instrumento será:

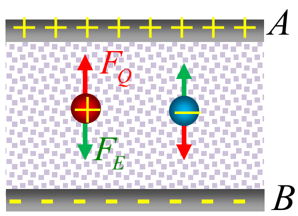
$$V_{medido} = +80 - (-40) = +120V$$

Así como el electroscopio requiere algunas cargas para producir la desviación de sus láminas, el voltímetro necesita tomar cargas de la magnitud que está siendo medida para poder realizar dicha determinación. Por este motivo, la medida debe realizarse entre objetos materiales conductores de la electricidad. Un voltímetro no puede utilizarse para medir diferencia de potencial entre dos puntos del espacio (fig.2.18b). En fig.2.18c se muestra el resultado obtenido al invertir las puntas de medida.

Independientemente del origen de la energía utilizada para separar las cargas, el trabajo por unidad de carga eléctrica realizado para separarlas se denomina fuerza electromotriz (f.e.m.). El resultado de este trabajo es acumulación de igual cantidad de cargas eléctricas de diferentes signos en regiones separadas con la correspondiente diferencia de potencial entre las mismas.

Fuerza electromotriz

Al frotar una varilla aislante con un paño, se separan cargas estableciendo una diferencia de potencial entre la varilla y el paño. Esta separación de cargas se produce por el trabajo mecánico realizado durante el frotamiento. Existen otras formas de hacerlo, siendo una de ellas la conversión de energía química en eléctrica que se realiza en pilas y acumuladores. En fig.2.19a se esquematiza el interior de una pila, indicándose con subíndice Q a las fuerzas de origen químico que separan cargas de diferente signo y las depositan en las placas correspondientes. Considerando que en el objeto B se acumulan cargas negativas y en A positivas, la f.e.m. que en este caso es el trabajo realizado por F_Q para llevar la unidad de carga eléctrica desde B hasta A, será:



(a)

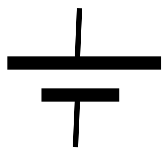

(b)

Fig.2.19

El símbolo utilizado para representar una f.e.m. que se mantiene constante en el transcurso del tiempo consta de un trazo más largo indicando el extremo que se carga positivamente mientras que el más corto corresponde a aquel en que se acumula igual cantidad de carga con signo negativo.

$$\varepsilon = \frac{W_{B\to A}}{q} = \int_B^A \frac{\vec{F}_Q}{q} d\vec{\ell} \qquad \text{ecs.2.3}$$

La unidad de medida de f.e.m. en el S.I. es el voltio.

La acumulación de cargas en las placas origina un campo eléctrico entre las mismas que se opone al traslado de cargas positivas hacia A y negativas hacia B. El equilibrio se alcanza cuando se igualan ambas fuerzas.

$$\vec{F}_E + \vec{F}_Q = 0$$

$$\varepsilon = \frac{W_{B\to A}}{q} = -\int_B^A \frac{\vec{F}_E}{q} d\vec{\ell} = -\int_B^A \vec{E} d\vec{\ell} = V_A - V_B$$

Esta expresión indica que la f.e.m. de una pila es igual a la diferencia de potencial entre sus terminales.

Otras maneras de generar f.e.ms. se consiguen a partir de fuentes de calor, luz, sonido, etc. utilizadas para impulsar cargas en un circuito.

El modelo para un conductor, fig.2.16, permite explicar de manera simple los fundamentos en que se basan varia aplicaciones técnicas.

En lenguaje técnico, "tensión eléctrica" indica tanto una f.e.m. como una caída de potencial.

Considerando que el término "tensión" se refiere al estado de un cuerpo bajo la influencia de fuerzas opuestas, su utilización en circuitos eléctricos se debe a que la diferencia de potencial por unidad de longitud (ecs.2.2) representa para cada tramo del circuito la fuerza impulsora por unidad de carga eléctrica, análogamente a como ocurre en los circuitos hidráulicos donde la diferencia de presión entre dos secciones transversales del mismo se relaciona con la fuerza que impulsa al fluido.

Potenciales de contacto

En el año 1799, A. Volta comprobó que en la unión de dos metales diferentes mantenidos a la misma temperatura, se establece una diferencia de potencial constante, cuyo valor depende de los materiales y es independientemente del tamaño de la superficie en contacto. Colocando diferentes metales en contacto pudo comprobar que la diferencia de potencial entre los extremos dependía de los materiales de las extremidades pero no de los intermedios.

Utilizando la analogía del recipiente para conceptualizar la f.e.m. por contacto, en fig.2.20 puede observarse que al unir dos metales diferentes, electrones del que tiene menor función trabajo pasan a aquel en que la función trabajo es mayor hasta que se igualen las energías. El que cede electrones se carga positivamente y negativamente el que los recibe. De esta manera aparece una diferencia de potencial donde el material de menor función trabajo está a por encima del que tiene mayor función trabajo.

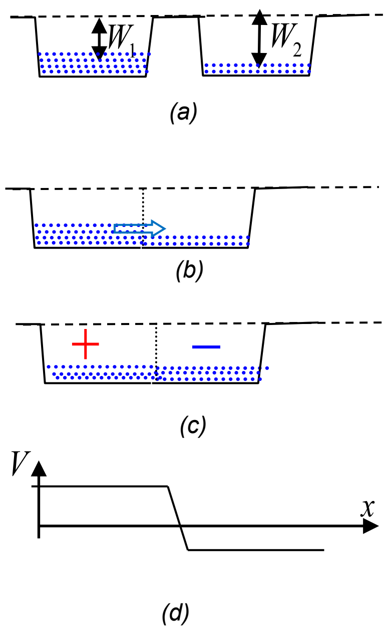


Fig.2.20

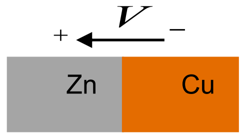
Potenciales termoeléctricos

En 1821 Seebeck comprobó experimentalmente que la diferencia de potencial entre dos metales unidos se modifica manteniendo los metales a diferente temperatura.

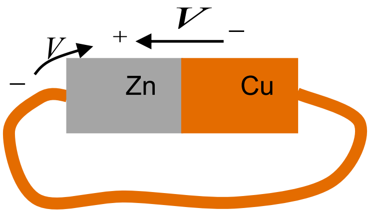
De fig.2.20 se puede comprobar que cuando los metales de la unión tienen diferente temperatura más electrones pasan hacia uno u otro lado modificándose la diferencia de potencial en la unión.

El efecto inverso, descubierto por Peltier, se obtiene al hacer circular una corriente eléctrica a través de la unión entre dos metales diferentes. Dependiendo del sentido de circulación de la corriente la unión se calentará o enfriará.

Thomson comprobó que cuando los extremos del mismo metal están a diferente temperatura, electrones libres del extremo caliente pasan hacia el extremo frío originando una pequeña diferencia de potencial que se estabiliza cuando la fuerza eléctrica originada por la acumulación de cargas de diferente signo en cada extremo se equilibra con la originada por la diferencia de temperatura.



(a)



(b)

Fig.2.21

Aunque en la unión cobre-zinc aparece una diferencia de potencial, al unir los extremos con un alambre de cobre no se detecta desplazamiento de cargas en un mismo sentido o corriente eléctrica.

Diferentes aplicaciones actuales, entre las que se mencionan la refrigeración del procesador en una CPU, termopares para accionamiento de electroválvulas en sistemas de detección de llama y medida de temperatura, termopilas, etc., se basan en los potenciales termoeléctricos.

Emisión termoiónica

El modelo de fig.2.16 también permite explicar la emisión termoiónica, fundamental para el funcionamiento de las válvulas de vacío utilizadas en los primeros amplificadores y equipos electrónicos hasta la actualidad.

Calentando suficientemente un trozo de metal (cátodo), electrones comienzan a "evaporarse" de su superficie formándose una nube electrónica a su alrededor.

Estableciendo una diferencia de potencial entre el cátodo caliente y una placa metálica, se detecta llegada de electrones a la placa cuando ésta se encuentra a mayor potencial que el cátodo (fig.2.22).

Para que se emita más cantidad de electrones a la misma temperatura se recubre al cátodo con materiales de menor función trabajo.

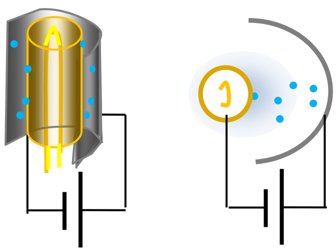


Fig.2.22

Capacidad eléctrica

En la figura se esquematiza un sistema de forma arbitraria consistente en dos conductores que se han cargado con igual cantidad de cargas de signos opuestos, determinándose la diferencia de potencial entre los mismos con un voltímetro.

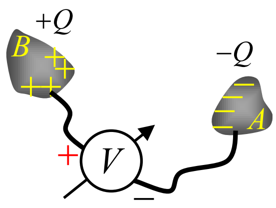


Fig.2.23

Así cómo es posible medir la diferencia de potencial entre dos objetos cargados, se puede medir la cantidad de carga acumulada en los mismos.

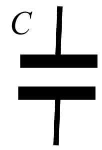


Fig.2.24

Independientemente del método de medida utilizado, la relación entre la carga trasladada y la diferencia de potencial que surge por este hecho depende de la forma de los objetos y del medio material entre ellos, siendo independiente de la cantidad de carga y diferencia de potencial.

Se denomina capacidad eléctrica a la relación entre la carga trasladada de un objeto a otro y la diferencia de potencial entre los mismos.

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \textit{ecs.2.4}$$

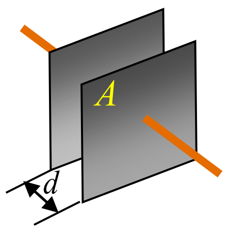
La unidad de medida de capacidad en el SI es el faradio (F). Un sistema tiene una capacidad de un faradio cuando trasladando un culombio de carga la diferencia de potencial se incrementa en un voltio.

En la figura 2.24 se muestra el símbolo utilizado para representar una capacidad, donde los trazos horizontales que corresponden a los objetos A y B de la figura anterior, se denominan placas del capacitor. Los tramos verticales indican los terminales o puntos de conexionado.

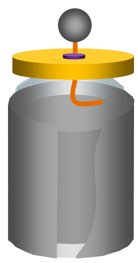
En algunos casos es posible obtener la expresión de la capacidad de un sistema en función de sus dimensiones, pudiéndose adelantar el resultado para dos placas metálicas extensas separadas una distancia pequeña respecto a sus dimensiones (ecs.2.5). En fig.2.25a se indica con A la superficie de cada placa metálica y d la separación entre las mismas. Si entre ellas no existe medio material, la expresión de la capacidad resulta:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad \textit{ecs.2.5}$$

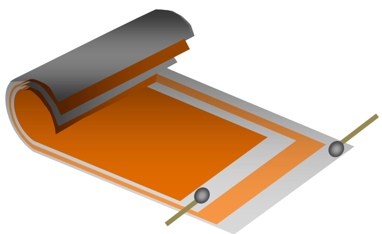
Donde ε_0 es la permitividad del vacío.



(a)



(b)



(c)

Fig.2.25

Aunque este resultado es válido para placas infinitamente grandes muy próximas entre sí entre las que existe vacío, puede utilizarse para estimar de manera aproximada la capacidad para placas de dimensiones reales.

Una manera simple de obtener dos láminas metálicas paralelas separadas una pequeña distancia entre si se consigue forrando con papel metalizado las caras interna y externa de un frasco de vidrio, que sirve de soporte y aislante entre las placas. Mediante un alambre conductor unido a cada placa se obtienen los terminales del dispositivo (fig.2.25b).

Para almacenar mayor cantidad de carga manteniendo valores razonables de la diferencia de potencial, se necesita mayor valor de la capacidad. Una manera de lograrlo es aumentando la superficie de las placas enrollando en forma alternativa láminas de papel encerado y papel de aluminio formando un tubo (fig.2.25c). Los terminales de conexionado del dispositivo se obtienen uniendo cada lámina conductora a un alambre de cobre (video).

Dos placas paralelas separadas por un espesor de aire de $1\,mm$ y cuya superficie es $1\,cm^2$ tienen una capacidad del orden del pF (un pico-faradio $10^{-12}\,F$).

Si entre las placas existe aire, la diferencia con el valor correspondiente al vacío es muy pequeña.

Carga de un capacitor

Cuando se unen los terminales de un capacitor a los bornes de una pila (o fuente de tensión), el mismo adquiere carga eléctrica hasta que la diferencia de potencial entre sus placas iguala a la existente entre extremos de la fuente. La cantidad de carga que recibe cada placa del capacitor se relaciona con la diferencia de potencial mediante la expresión $Q = CV$. En fig.2.26a se esquematiza la situación en que la conexión entre ambos dispositivos se realiza mediante un interruptor. Se indica con V_b a la diferencia de potencial entre bornes de la pila. La posición del interruptor indica que el circuito está cortado ("interruptor abierto") de modo que la pila no entrega cargas al capacitor siendo nula la diferencia de potencial entre sus placas. Por este motivo, la placa superior del capacitor está al mismo potencial que el terminal negativo de la fuente y los electrones libres en la misma tendrán mayor energía potencial que la que tendrían en el terminal positivo, hacia el que no pueden pasar por estar interrumpido el circuito.

Se denomina capacitor eléctrico al elemento de circuito cuya principal característica eléctrica es la capacidad.

En fig.2.26a, el potencial de la placa inferior es igual al del borne negativo de la fuente.

Si el capacitor está descargado, el campo eléctrico entre sus placas es nulo no existiendo diferencia de potencial entre ellas.

Como resultado, cuando el circuito está abierto, el potencial de la placa superior es el mismo que el del terminal negativo de la fuente.

Cuando se cierra el interruptor se completa el camino de los electrones libres hacia el terminal positivo de la fuente de tensión. A medida que los electrones abandonan la placa superior del capacitor, esta adquiere carga positiva aumentando su potencial con respecto al potencial de la placa inferior (fig.2.26b). Cuando en electrón alcanza el terminal positivo de la pila, se neutraliza con un ión positivo disminuyendo el campo eléctrico dentro de la misma. Esto tiene dos consecuencias: dentro de la pila, un electrón del terminal negativo dejará de ser atraído por una carga de signo contrario del terminal positivo, quedando “en libertad” para será atraído por la carga positiva en exceso de la placa superior del capacitor, a la que no podrá llegar acumulándose en la parte superior de la placa inferior (fig.2.26c). Por otra parte, la disminución del campo eléctrico en el electrolito permite que un par de cargas de signos opuestos migren hacia las respectivas placas por efecto de las fuerzas químicas, restableciendo la diferencia de potencial entre las placas (fig.2.26d).

Como resultado, a partir del cierre del interruptor existe un intervalo de tiempo muy corto en el que electrones llegan al terminal positivo de la pila desde la placa superior del capacitor e igual cantidad de electrones salen del terminal negativo de la pila hacia la placa inferior del capacitor. Esto es posible mientras exista energía suficiente en el electrolito para reponer las cargas manteniendo el valor de tensión en la pila.

A medida que la placa superior del capacitor adquiere carga positiva y la inferior igual cantidad de carga negativa, aumenta la diferencia de potencial entre ellas. El pasaje de electrones desde el capacitor a la pila en la parte superior del circuito y desde la pila al capacitor por la inferior, finaliza cuando no existe más diferencia de energía potencial entre los electrones en el capacitor con los electrones en la pila al igualarse ambas tensiones.

Esquemáticamente en fig.2.27 se representa la situación una vez alcanzado el equilibrio.

En estas condiciones no existe un desplazamiento neto de electrones hacia uno u otro lado o corriente eléctrica por el circuito (video).

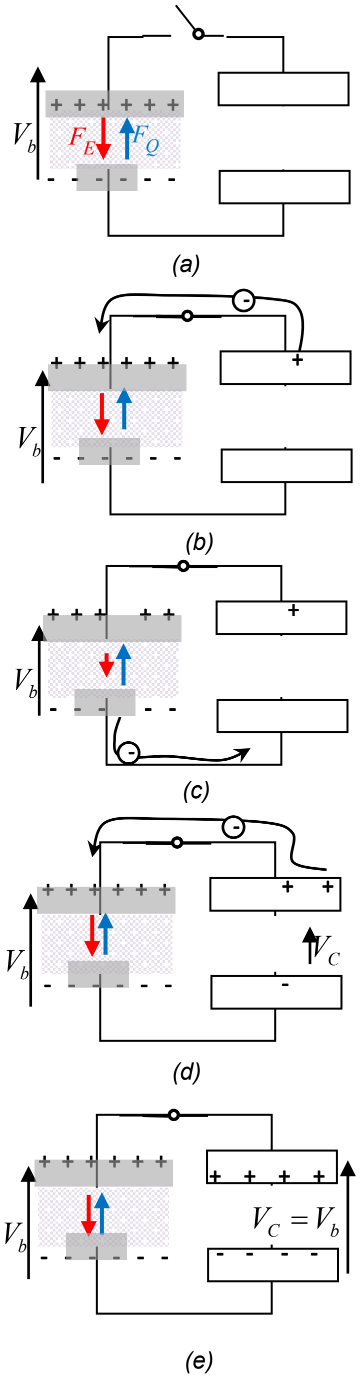


Fig.2.26

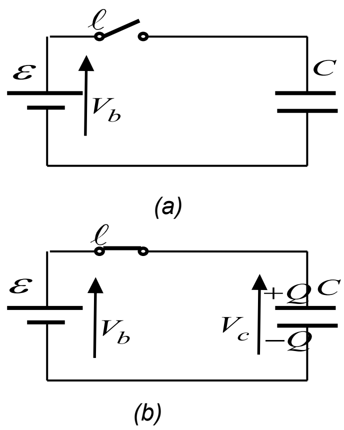


Fig.2.27

Capacitores en paralelo

Cuando se conecta directamente a los bornes de la fuente más de un capacitor, de manera similar a la comentada anteriormente, la fuente de tensión entregará cargas a cada uno en la cantidad necesaria de acuerdo su capacidad, hasta que la tensión entre placas de cada capacitor iguale a la existente en los terminales de la fuente de tensión.

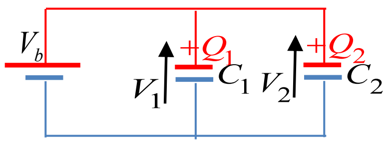


Fig.2.28

Este tipo de conexión, en la que los capacitores tienen entre sus placas la misma diferencia de potencial eléctrico, recibe el nombre de conexión en paralelo. En esta situación la carga que entrega la fuente de tensión se reparte entre los capacitores conectados a la misma, en mayor cantidad cuanto mayor sea su tamaño.

$$V_b = V_1 = V_2$$

La carga de cada capacitor será:

$$Q_1 = V_b C_1$$

$$Q_2 = V_b C_2$$

La carga entregada por la fuente:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q = V_b\left(C_1 + C_2\right)$$

Pudiendo reemplazarse a ambos capacitores por uno equivalente:

$$C_{paralelo} = C_1 + C_2$$

Para N capacitores en paralelo, la capacidad equivalente está dada por la siguiente expresión:

$$C_{paralelo} = \sum_{i=1}^{N} C_i \qquad \textit{ecs.2.6}$$

La capacidad equivalente de varios capacitores en paralelo se obtiene sumando las capacidades individuales.

Ejercicio 2.1:

Se carga un capacitor de $2{,}2\mu F$ mediante una fuente de tensión de 12 V. Una vez cargado, se desconecta de la fuente y se unen sus placas a otro capacitor de $4{,}7\mu F$, inicialmente descargado. Calcule la tensión y carga de cada capacitor.

Solución:

La cantidad de carga almacenada inicialmente se obtiene de la definición de capacidad:

La capacidad equivalente de varios capacitores en serie es la inversa de la suma de las inversas de las capacidades individuales.

$$Q_1 = V_b C_1 = 26,4 \mu C$$

Al conectar C_2 en paralelo, la carga se reparte entre ambos, resultado la diferencia de potencial:

$$V' = \frac{Q}{C_1 + C_2} = 3,83 \; V$$

La carga en cada capacitor será:

$$Q_1 = V' C_1 = 8,42 \mu C$$

$$Q_2 = V' C_2 = 17,98 \mu C$$

Verificándose que la suma de ambas es igual a la carga inicial.

A partir de la desconexión de la fuente de tensión la cantidad de carga disponible no se modificará debido a que en este caso la fuente es la única que puede proveer cargas al circuito.

Capacitores en serie

En la conexión en paralelo las cargas se transfieren a los capacitores por contacto directo entre las partes involucradas. Para comprender cómo es la conexión en serie, comencemos considerando dos objetos con igual cantidad de carga Q con signos opuestos, indicados en la figura con A y B conectados a una fuente de tensión V_b.

En fig.2.29b se agregan otros dos objetos metálicos neutros, C y D, colocados de manera que la carga inducida en ellos sea la máxima posible. A y C forman un capacitor cuya capacidad denominamos C_1. De la misma manera, la capacidad entre D y B la llamamos C_2.

Al unirlos eléctricamente, C y D forman un único conductor neutralizándose entre sí las cargas positivas en la parte inferior de C con las negativas de la parte superior de D. Las restantes quedan en su lugar debido a la atracción ejercida por las cargas en A y B según corresponda.

Como inicialmente A y B tienen igual cantidad de cargas de signos opuestos, la cantidad de carga inducida en los inicialmente neutros, es la misma.

La diferencia de potencial entra A y C resulta:

$$V_A - V_C = \frac{Q}{C_1}$$

Y entre D y B:

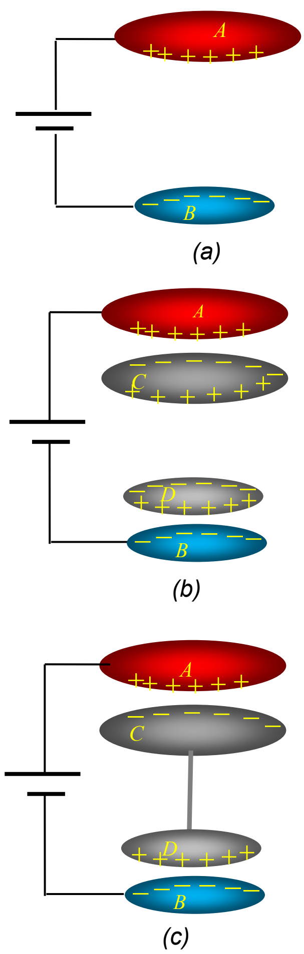


Fig.2.29

$$V_D - V_B = \frac{Q}{C_2}$$

La diferencia de potencial entre los objetos extremos resulta:

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_D - V_B)$$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$\frac{V_A - V_B}{Q} = \frac{1}{C_S} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

En general, la capacidad equivalente de N capacitores en serie se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{1}{C_{serie}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \qquad \textit{ecs.2.7}$$

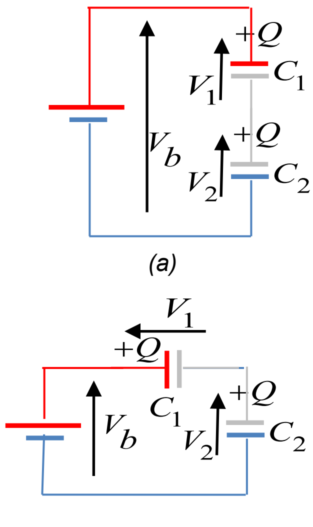


Fig.2.30

La capacidad de dos capacitores en serie es igual al producto de las capacidades dividido la suma de las mismas.

$$C_{serie} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Combinaciones serie-paralelo

Cuando el circuito está formado por combinaciones de capacidades en serie y paralelo pueden llevarse a formas más simples a medida que se resuelven las asociaciones identificadas. En el siguiente ejemplo se muestra una manera de resolver circuitos de este tipo.

Ejercicio 2.2: Para el circuito de fig.2.31a, considere:

$$V_b = 12V,\ C_0 = 0{,}5\mu F$$
$$C_1 = 1{,}0\mu F;\ C_2 = 2{,}0\mu F \ y \ C_3 = 3{,}0\mu F,$$

Calcule la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito.

Solución:

Comenzando a recorrer el circuito en sentido anti-horario a partir de la placa inferior de C_3, se atraviesa a este y C_2 pasando por el punto B.

Al llegar al punto de unión entre C_1, C_2 y C_0 se tendrán dos opciones: ir hacia C_0 o hacia C_1.

Para calcular $V_A - V_B$ es necesario conocer la diferencia de potencial entre placas de C_0 y C_2. Si existen capacitores en serie o paralelo se los reemplaza por su equivalente y se realiza el esquema correspondiente. Se repite este procedimiento hasta llegar a un único elemento conectado a la fuente.

Este punto es un nodo o bifurcación y allí finaliza la rama que contiene a C_3 y C_2. Antes de conectar la fuente de tensión al circuito los capacitores estaban descargados; como la fuente de tensión es la única que puede proveer cargas al circuito, solamente se modificará la cantidad de carga en los puntos unidos a sus terminales. Por este motivo, el equipotencial que contiene al punto B tampoco tendrá exceso de cagas después de conectada la fuente. Si la placa superior de C_3 adquiere carga de un signo, la placa de la derecha de C_2 tomará igual cantidad de cargas pero de signo contrario. De esta manera, se puede comprobar que ambos capacitores se cargan de igual forma y por tanto están en serie.

En fig.2.31c, C_{23} reemplaza la serie entre C_2 y C_3 mientras que en fig.2.31d, C_{123} corresponde al paralelo entre C_1 y C_{23}. En fig.2.31e, C_{equiv} es la capacidad equivalente de la serie entre C_0 y C_{123}, obteniéndose:

$$C_{23} = \frac{6}{5}\mu F, \quad C_{123} = \frac{11}{5}\mu F, \quad C_{equiv} = \frac{11}{27}\mu F$$

Para calcular la carga en cada capacitor se recorren las figuras en sentido inverso, comenzando por la fig.2.31e.

$$Q_0 = \frac{132}{27} = 4,89\mu C$$

La carga que la fuente de tensión entrega al circuito es la misma para cada uno de los capacitores en serie (fig.2.31f), pudiéndose determinar la caída de potencial en los mismos.

$$V_{123} = \frac{4,89\mu C}{11/5\,\mu F} = 2,22V$$

$$V_0 = \frac{4,89\mu C}{0,5\mu F} = 9,78V$$

Como verificación, se comprueba la coincidencia de la suma de dichas caídas de potencial con la tensión aplicada V_b.

V_{123} permite determinar la carga de C_{23} (fig.2.31g) y con ella V_2 (fig.2.31h). Podrá observarse que las figs.2.31f, g y h, que son repetición de fig.2.31d, c y b, podrían omitirse recorriendo las mismas en sentido inverso a partir de fig.2.31e.

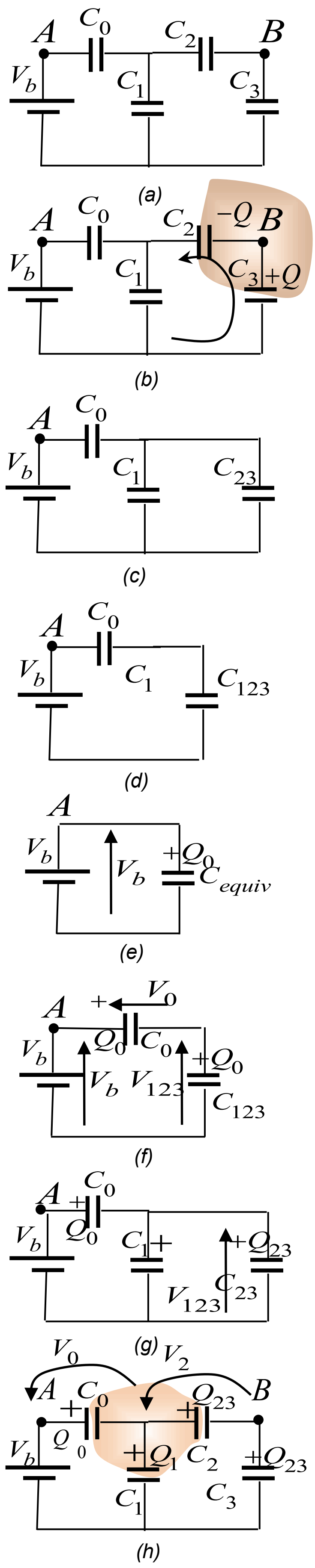


Fig.2.31

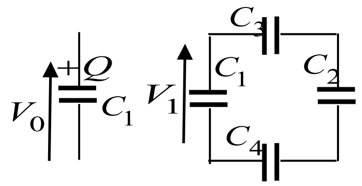
Como comprobación, la carga neta en el equipotencial que comprende a la placa derecha de C_0, izquierda de C_2 y superior de C_1 (fig.2.31h), debe ser nula.

$$-Q_0 + Q_1 + Q_{23} = 0$$

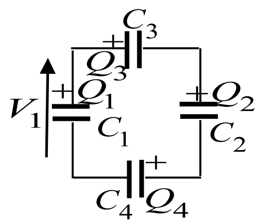
Finalmente, sumando las caídas de potencial en C_0 y C_2 se puede determinar que el potencial de A se encuentra 11,11 V por encima del potencial en B.

A veces, aunque no sea sencillo determinar si un grupo de capacitores está en serie o paralelo, es posible encontrar una solución de manera simple. El siguiente ejercicio muestra la manera de resolver este tipo de situaciones.

La polaridad que adquieren los capacitores se elige de manera arbitraria. Un resultado positivo indica que, para esa variable la polaridad es la adoptada inicialmente mientras que un resultado negativo indica lo contrario.



(a) *(b)*



(c)

Fig.2.32

Ejercicio 2.3:

Un capacitor C_1 de 33pF de capacidad se carga conectándolo a una fuente de tensión V_0 =700V. Una vez cargado, se desconecta de la fuente.

Próximo a él se encuentra otro capacitor, C_2 de 56pF inicialmente descargado. Se unen los extremos de ambos capacitores por medio de dos capacitores de capacidad C_3 y C_4, como se indica en la figura.

¿Se modificará la tensión en C_1?

Considerando $C_3 = C_4 = C$ resuelva el circuito y determine la tensión en extremos de C_1 en función de C.

Solución:

Es fácil determinar la carga inicial de C_1.

$$Q = 23{,}1\ nF$$

Para resolver el circuito se asigna una variable a la carga en cada capacitor, en este caso Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 eligiendo la polaridad de manera arbitraria (fig.2.32c).

Aunque no es necesario, una elección "conveniente " de la polaridad puede facilitar la resolución. En este sentido, cuando se agrega el resto de capacidades, parte de la carga de la placa superior de C_1 pasa a la placa izquierda de C_3. Por este motivo se adoptó polaridad positiva para esta placa resultando negativa la otra placa de C_3.

Sabiendo que la carga neta en el equipotencial formado por la placa superior de C_2 y la placa derecha de C_3 es nula y habiendo resultado de la elección anterior polaridad nega-

Dentro de lo posible, es conveniente verificar el resultado obtenido para determinadas condiciones en las que se conoce el comportamiento del circuito. Independientemente de la geometría de las placas del capacitor, la expresión de la capacidad de un capacitor plano puede ser un punto de partida.

tiva para esta última, la placa superior de C_2 tendrá polaridad positiva.

Como en este caso la elección de la polaridad se basó en un razonamiento previo, si el mismo fue correcto los resultados tendrían que tener signos positivos.

De acuerdo a lo expresado se tiene:

$$Q = Q_1 + Q_3$$

Lo mismo sucede con la carga negativa de la otra placa de C_1.

$$-Q = -Q_1 - Q_4$$

Comparando estas dos expresiones resulta

$$Q_3 = Q_4$$

Debido a que inicialmente los capacitores C_2, C_3 y C_4 están descargados, la carga neta en el equipotencial formado por la unión de C_3 con C_2 es nula.

$$-Q_3 + Q_2 = 0$$

Lo mismo ocurre en la unión entre C_2 y C_4.

$$+Q_4 - Q_2 = 0$$

Resultando

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q - Q_1$$

Finalmente, teniendo en cuenta que para los signos asignados a las cargas el potencial en V_1 se reparte en los demás capacitores, se tiene

$$V_1 = V_2 + V_3 + V_4$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = (Q - Q_1)\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right)$$

Que permite expresar la tensión sobre C_1 en función de la inicial V_0 y las capacidades del sistema.

Para $C_3 = C_4 = C$ la misma se reduce a:

$$V_1 = V_0 C_1\left(\frac{C + 2C_2}{C(C_1 + C_2) + 2C_1C_2}\right)$$

El ejercicio comienza con un capacitor C_1 aislado y cargado. En estas condiciones la diferencia de potencial entre sus placas es de 700 V. El circuito completo presentará este comportamiento si las placas de los capacitores indicados con C están infinitamente alejadas.

El conocimiento de la capacidad entre objetos permite, además de encontrar la carga y diferencia de potencial entre sus placas, determinar el trabajo necesario para cargarlo, almacenado como energía potencial disponible para ser utilizada cuando se requiera.

En estas condiciones, utilizando la expresión de la capacidad de un capacitor plano

$$C\big|_{d\to\infty} = 0$$

Reemplazando este valor en la expresión anterior se comprueba que

$$V_1\big|_{d\to\infty} = V_0$$

Por otra parte, si se acerca C_2 a C_1 tanto como para que las placas entren en contacto (C_1 y C_2 en paralelo), la carga inicial se reparte entre ambos capacitores y la tensión disminuye.

$$V_1 = \frac{Q}{C_{paralelo}} = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Que es el valor correspondiente cuando C es infinitamente grande, ($d \to 0$).

$$\lim_{C\to\infty} V_1 = V_0 C_1 \left(\frac{1 + 2\frac{C_2}{C}}{(C_1 + C_2) + 2\frac{C_1 C_2}{C}} \right) = V_0 \frac{C_1}{(C_1 + C_2)}$$

Energía almacenada en un capacitor

Debido a que un capacitor de capacidad C cargado con una carga q tiene entre sus placas una diferencia de potencial V, el trabajo realizado para incrementar su carga una cantidad dq es:

$$dW = Vdq$$

El trabajo necesario para cargar con Q al capacitor inicialmente descargado, es la suma de todos los trabajos elementales. En el límite, cuando los elementos dq son tan pequeños como sea posible, dicha suma se convierte en una integral:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Esta expresión se obtuvo considerando al capacitor inicialmente descargado y se utiliza en situaciones en que se encuentra aislado y por tanto no se modifica la cantidad de carga eléctrica almacenada en las placas.

A medida que la carga aumenta, se incrementa también la diferencia de potencial entre placas del capacitor. Como ambas magnitudes están relacionadas por la capacidad del sistema, el trabajo realizado para cargar al capacitor de capacidad C con una carga Q se puede expresar en función de uno de estos parámetros.

Este trabajo se almacena totalmente en forma de energía electrostática y puede ser utilizado durante la descarga al capacitor.

Cuando el capacitor se mantiene conectado a una pila o a una fuente de tensión conviene expresar el trabajo que realiza para cargar al capacitor en función de la diferencia de potencial V entre placas del mismo, que en estas condiciones permanece inalterada. De la definición de capacidad,

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

El trabajo realizado para cargar al capacitor se almacena en forma de energía potencial eléctrica, la que responde a cualquiera de las dos expresiones siguientes:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 \qquad \textit{ecs.2.8}$$

En las que el capacitor de capacidad C está cargado con carga Q siendo V la diferencia de potencial entre sus placas,

Fuerza entre las placas de un capacitor cargado

Existe atracción entre dos objetos con exceso de cargas de signos opuestos, requiriéndose una fuerza externa para mantenerlos en su posición. La determinación de esta fuerza puede realizarse de manera sencilla cuando se conoce la expresión de la capacidad del sistema.

En fig.2.33a se consideran dos placas cargadas inicialmente separadas una distancia x. Por aplicación de una fuerza externa la separación entre ellas se incrementa una longitud dx. Al aumentar la separación entre placas, disminuye la capacidad de modo que se debe considerar algún cambio en la carga o en la diferencia de potencial entre las placas y por lo tanto en la energía potencial eléctrica almacenada.

En fig.2.33b se muestra la situación en que la fuente de tensión se desconecta después de cargar al capacitor y por lo tanto la cantidad de carga sobre las placas no se modifica.

En condiciones electrostáticas, el trabajo realizado para producir una variación dx en la separación entre placas origina una variación de la energía potencial eléctrica.

$$dW_{ext} = \vec{F}_{ext} d\vec{\ell} = dU_{potencial} \qquad \textit{ecs.2.9}$$

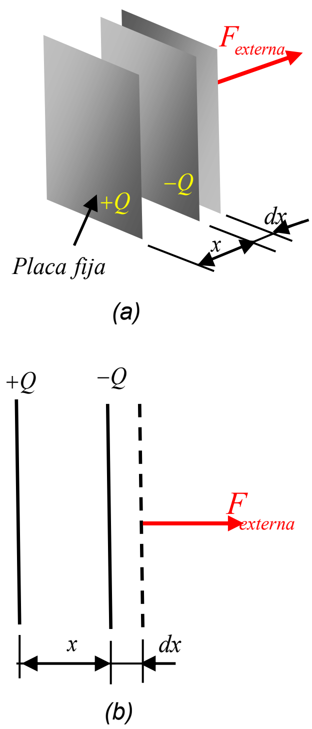


Fig.2.33

Utilizando la expresión de la energía en función de la carga almacenada se puede determinar el valor de la fuerza externa necesaria para mantener en su posición dos placas paralelas cargadas con carga Q y aisladas.

$$F_{ext} = \frac{Q^2}{2A\varepsilon_0}$$

Si la diferencia de potencial entre placas tiende a disminuir, la fuente entregará cargas para mantenerla constante. Contrariamente, si tiende a aumentar pasarán cargas a la fuente siendo negativo el trabajo realizado.

Cuando la batería permanece conectada (fig.2.34), al desplazar una de las placas se modifica la capacidad. Para mantener la diferencia de potencial entre placas del capacitor constantemente igual a la existente en bornes de la fuente de tensión, esta deberá entregar o quitar cargas. Por este motivo, además del trabajo mecánico necesario para separar las placas deberá tenerse en cuenta el trabajo realizado por la fuente de tensión para colocar o quitar cargas del capacitor.

De acuerdo a la definición de diferencia de potencial, el trabajo para llevar una carga dq a una región que se encuentra V voltios por encima de aquella de la que proviene el elemento de carga es:

$$dW_{fuente} = V_{fuente} dq$$

De esta manera, en condiciones de diferencia de potencial constante, la variación de energía potencial se relaciona con el trabajo externo mediante la siguiente expresión:

$$\vec{F}_{ext} d\vec{\ell} + V_{fuente} dq = dU_{potencial} \qquad \textit{ecs.2.10}$$

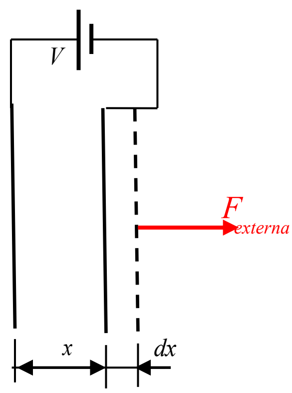


Fig.2.34

En este caso conviene expresar la variación de energía potencial en función de la diferencia de potencial, que no se modifica.

$$F_{ext} dx + V_{fuente}^2 dC = \frac{V_{fuente}^2}{2} dC$$

Utilizando la expresión correspondiente para la capacidad de un capacitor plano se puede obtener la variación dC para un desplazamiento dx de sus placas. La fuerza necesaria para mantener en su posición a las placas separadas una distancia cuando la diferencia de potencial entre ellas en un valor constante V_{fuente} resulta:

$$F_{ext} = \frac{V_{fuente}^2}{2x} C(x)$$

En ambos casos, para el capacitor aislado o manteniendo sus placas unidas a una fuente de tensión, la fuerza externa necesaria para mantener las placas en su posición debe vencer a la atracción eléctrica entre las mismas.

Influencia del dieléctrico en la capacidad de un sistema

Generalmente, entre las placas metálicas de un capacitor existe un aislante o dieléctrico que las separa eléctricamente y sirve de soporte del conjunto. Utilizando un electroscopio es posible comprobar la dependencia de la capacidad con el medio material utilizado para tal fin.

Dos placas metálicas dispuestas paralelamente sobre un soporte aislante, se cargan de la manera indicada en fig.2.35a. La conexión a tierra de la placa de la derecha permite que la misma se cargue por inducción con igual cantidad de carga que la placa de la izquierda, aunque de signo contrario. Conectando un electroscopio de la manera indicada en fig.2.35b, se redistribuyen las cargas alcanzándose el equilibrio cuando las partes metálicas en contacto tienen el mismo potencial eléctrico.

Al introducir un dieléctrico entre las placas del capacitor, se observa que la desviación del electroscopio disminuye, indicando disminución en la diferencia de potencial que, por estar las placas aisladas puede interpretarse como un aumento en la capacidad (fig.2.35c). Se puede explicar este comportamiento reemplazando al electroscopio por su capacidad equivalente, denominada C_e en fig.2.35d, donde se indica con C_0 a la capacidad del capacitor plano sin dieléctrico. La misma se representa con C_K en fig.2.35e indicando que se introdujo un dieléctrico. Antes de colocar el dieléctrico la diferencia de potencial entre placas es:

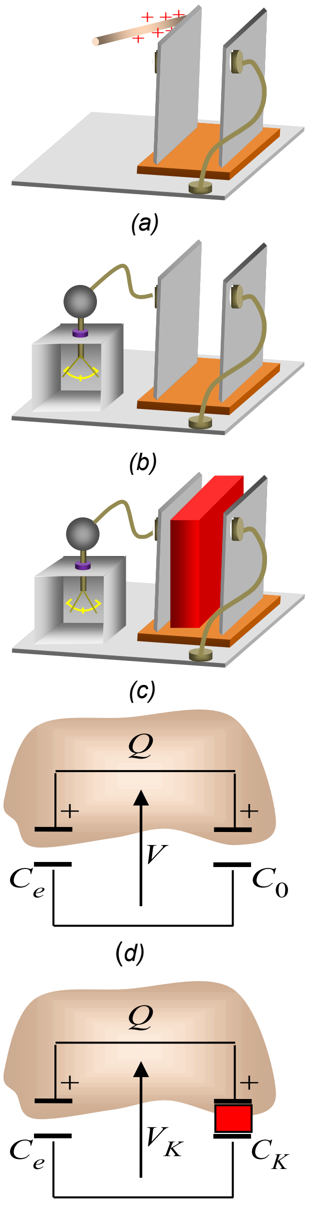


Fig.2.35

$$V = \frac{Q}{C_0 + C_e}$$

Y con el material aislante

$$V_K = \frac{Q}{C_K + C_e}$$

De la observación experimental, $V > V_K$, resultando $C_K > C_0$. Se denomina constante dieléctrica del material a la relación

$$\kappa_e = \frac{C_K}{C_0} \qquad \textit{ecs.2.10}$$

Material	Ke
Vacío	1
Aire	1,0059
Poliestireno	2,5
Papel encerado	4 a 6
Vidrio común	4,2
Mica	6,8
Cerámica (bajas pérdidas)	6 a 20

Tabla 2.1

Aunque el reemplazo del electroscopio por un voltímetro permite la determinación cuantitativa de la diferencia de potencial entre placas, es bastante difícil lograr de esta manera una lectura estable del instrumento recurriéndose generalmente a otros métodos para determinar la constante dieléctrica del material. En la tabla 2.1 se indica el valor de la constante dieléctrica para algunos materiales.

Componentes eléctricos: Capacitores

En circuitos eléctricos y electrónicos se utilizan capacitores con valores desde algunos picofaradios hasta varios microfaradios. Entre sus especificaciones está el valor de la capacidad, tolerancia de fabricación y diferencia de potencial máxima a la que puede someterse de manera segura.

Los capacitores de papel (fig.2.25c), con armaduras de aluminio o depósito de plata, se construyen para un intervalo de capacidades entre 1nF y 200μF con tensiones máximas de trabajo entre 200 y 1000V en continua, utilizándose para aplicaciones generales en electrónica, arranque de motores monofásicos y corrección de factor de potencia (Capítulo 7).

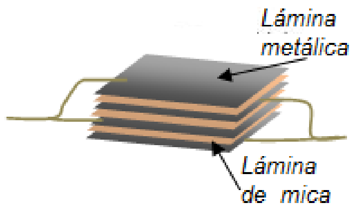
Los capacitores de película plástica son similares reemplazándose el aislante de papel impregnado en aceite por una película de material aislante.

Los capacitores de mica (fig.2.36a), se obtienen apilando en forma alternada láminas metálicas y mica. Poseen alta estabilidad en el tiempo.

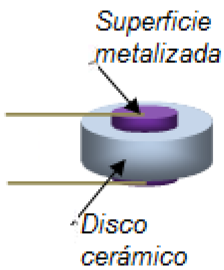
Otro tipo de capacitores son los denominados cerámicos, en los que se deposita una película metálica a ambos lados de un disco cerámico (fig.2.36b). Entre sus aplicaciones puede mencionarse los filtros de radiofrecuencia.

Se denomina capacitor variable a aquel cuya capacidad puede ser modificada durante su utilización. Existen diferentes tipos constructivos, entre ellos los utilizados para sintonía en los receptores de radio (fig.2.36c), en los que se intercalan placas metálicas fijas con otras que pueden girar sobre un eje, existiendo aire entre las mismas.

La utilización de dos electrodos metálicos sumergidos en un electrolito permitió obtener mayor capacidad por unidad de volumen alcanzándose valores en el orden de mili-faradios.



(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.2.36

El dieléctrico se obtiene químicamente, formando una película aislante sobre uno o ambos electrodos metálicos. Este tipo de capacitores recibe la denominación de capacitores electrolíticos, (fig.2.36d) siendo los más comunes aquellos que están diseñados para operar con una única polaridad, la que se indica en el encapsulado junto con el valor de la capacidad, tolerancia y diferencia máxima de potencial a que puede ser sometido. Entre sus aplicaciones puede mencionarse la utilización como filtro en fuentes de tensión continua.

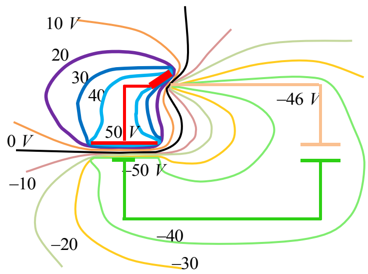
Campos eléctricos en un circuito

En fig.2.37 se muestran algunos equipotenciales obtenidos para el circuito formado por dos placas paralelas entre las que se mantiene una diferencia de potencial de 100 V.

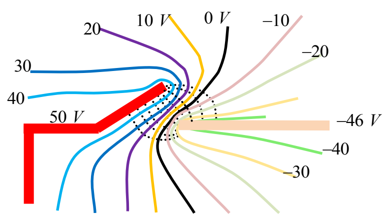
En fig.2.37a el interruptor abierto indica que aún no se ha establecido una conexión entre el capacitor y la fuente de tensión.

Aunque el conocimiento de las dimensiones de los objetos intervinientes no modifica la explicación, influyen en la forma de los equipotenciales. En estos ejemplos, para disponer de mayor espacio para la representación, las aproximaciones numéricas utilizadas en la determinación de los equipotenciales consideran el tamaño de la separación entre placas comparable con las dimensiones de las mismas. Por este motivo, estando abierto el circuito la diferencia de potencial en el capacitor es del orden de 4V. Cuando la distancia entre placas es varias veces menor que las otras dimensiones, como ocurre en los capacitores utilizados en circuitos, este potencial se reduce notablemente coincidiendo con el resultado obtenido en la explicación conceptual realizada anteriormente.

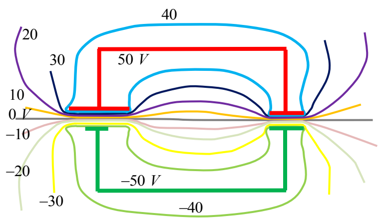
En los ejercicios de final de capítulo y problemas en general, en que no se considera la posición relativa de los componentes, esta diferencia de potencial se considera nula. Por otra parte, en la región alrededor del interruptor abierto se produce la máxima diferencia de potencial, 96 V para el ejemplo mostrado que se eleva a los 100 V de fuente para las dimensiones involucradas en capacitores reales.



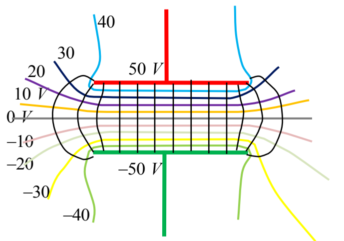
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.2.37

En fig.2.37b, se muestra cómo se distribuyen las líneas de potencial alrededor del interruptor. En la misma se agregaron algunas líneas perpendiculares a las anteriores para mostrarla dirección del campo eléctrico en la región. La magnitud del campo depende del valor de la tensión aplicada por la fuente y de la separación entre contactos del interruptor.

Cuando se cierra el interruptor, se establece un camino conductor entre una región a +50V y otra a -46V haciendo que electrones libres pasen a la región de menor energía potencial dejando igual exceso de carga positiva en la placa superior del capacitor.

El potencial de esta placa comienza a elevarse originando un campo eléctrico entre las placas que atrae electrones libres de la parte inferior del circuito.

De esta manera, entran a la fuente electrones por el terminal positivo y salen en igual cantidad por el negativo. Dentro de la fuente se realiza el trabajo necesario para mantener constante la diferencia de potencial entre sus extremos.

A medida que aumenta la cantidad de cargas en cada placa del capacitor se incrementa la diferencia de potencial entre ellas, hasta que se iguala con la tensión de la fuente finalizando el pasaje de cargas.

En fig.2.37c se muestra la distribución de potenciales una vez alcanzado el equilibrio. Como puede observarse, la diferencia de potencial entre placas del capacitor es igual a la tensión de fuente siendo nula la diferencia de potencial entre extremos del interruptor cerrado.

Aunque la primera parte de este libro está centrada en la resolución de circuitos, para contar con una herramienta adicional cuando se trate el principio de funcionamiento de algunos dispositivos, vamos a considerar algunos de los temas tratados en estos dos capítulos iniciales desde el punto de vista de equipotenciales y líneas de campo eléctrico. Para ello, tendremos que adelantar algunos conceptos relacionados con la teoría de campo eléctrico.

Relacionando circuitos y campos

La representación de equipotenciales/campos y la resolución de circuitos eléctricos son dos estrategias diferentes empleadas para resolver situaciones que involucren cargas eléctricas. La elección de uno u otro método depende de la utilidad de la información resultante. Cuando sea posible la utilización de uno u otro modelo, el resultado obtenido debe ser el mismo.

ACTIVIDADES

2.1 Considere dos objetos metálicos A y B de forma irregular, separados y cargados eléctricamente. El trabajo para trasladar una carga puntual de 3nC desde A hasta B siguiendo una trayectoria de 30cm de longitud, es de 0,73μJ.

a) Determine el trabajo necesario en caso que se traslade la carga desde A hasta B por un camino diferente cuya longitud es de 47cm. Justifique la respuesta.

b) Determine la diferencia de potencial entre los objetos.

c) Indique si los objetos están cargados eléctricamente y en caso afirmativo, el signo de la carga eléctrica de los mismos.

d) En las proximidades de A se libera una carga puntual de -0,5 μC y 8mg de masa.

¿Es necesario realizar trabajo para llevarla hasta el objeto B?

Si la respuesta es afirmativa calcule el trabajo necesario, en caso contrario determine la velocidad de la partícula justo antes del impacto.

2.1) Recuerde que el campo electrostático es conservativo.

Junto con la definición de diferencia de potencial tenga en cuenta que debe realizar trabajo para ir de A hasta B.

Deberá recordar la expresión para la energía cinética de un cuerpo.

2.2 El trabajo total realizado para cargar eléctricamente un objeto trayendo las cargas desde muy lejos, fue de 317,4μJ. Una vez cargado, agregar una carga de +1,6 x 10^{-19}C requirió 3,68 x 10^{-10}μJ adicionales. Calcule la capacidad del sistema. ¿Es la carga del objeto positiva o negativa?

2.2) Deberá diferenciar entre energía de un cuerpo cargado y potencial del mismo. Finalmente la definición de capacidad le será de utilidad.

2.3 Considere cuatro puntos P1, P2, P3 y P4 de una región de campo electrostático. La diferencia de potencial entre P1 y P2, V1-V2, es 120V mientras que entre P3 y P4, V3-V4 es -300V.

a) ¿Se encuentra a mayor potencial P1 o P2?

b) Repita a) para P3 y P4.

2.3c) Esquematice la situación indicando los pares de puntos entre los que conoce la diferencia de potencial.

c) ¿Puede comparar el potencial de P1 con el de P3? Intente una explicación a su respuesta.

2.4 Para los puntos de la actividad anterior se toma la diferencia de potencial entre cada punto y uno común tomado como referencia, obteniéndose los siguientes valores:

V1-VR=37 V, V2-VR=-83 V,

V3-VR=30 V, V4-VR=330 V.

Calcule la diferencia de potencial entre cada punto y los restantes.

2.5 Explique qué entiende por f.e.m.

2.6 a) Se dispone de cinco capacitores de 4 μF y 500V de tensión de ruptura.

a) Calcule la capacidad equivalente cuando se conectan en serie los cinco capacitores.

b) Se desea conectar la serie del inciso a) a una fuente de tensión de 2000V. Determine la carga y diferencia de potencial en cada capacitor ¿Se puede conectar la fuente sin riesgo que alguno se dañe?

c) ¿Qué cantidad de carga debe suministrar la fuente al circuito?

d) Calcule el trabajo que debe realizar la fuente para suministrar la carga calculada en el inciso anterior.

e) Calcule la energía total almacenada en los capacitores. Compare el resultado con el del inciso anterior y trate de dar una justificación al mismo.

2.6a) La tensión de ruptura es el valor de la tensión entre placas a partir del que comienzan a modificarse las propiedades del dieléctrico.

2.6e-7e) Los capacitores, inicialmente descargados adquieren carga al conectar la fuente. Durante el intervalo de tiempo que transcurre para llegar a su valor final, la carga varía en el tiempo y los campos generados dejan de ser electrostáticos. Parte de la energía entregada por la fuente se disipa como calor en los conductores y parte se transforma en energía de los campos eléctricos y magnéticos generados pudiendo, según la forma y dimensiones del circuito, irradiarse fuera del mismo.

2.7 a) Calcule la capacidad equivalente de los cinco capacitores del ejercicio anterior conectados en paralelo.

b) Se desea conectar el paralelo del inciso a) a una fuente de tensión de 400V. Determine la carga y diferencia de potencial en cada capacitor ¿Se puede conectar la fuente sin riesgo que alguno se dañe?

c) ¿Qué cantidad de carga debe suministrar la fuente al circuito?

d) Calcule el trabajo que debe realizar la fuente para suministrar la carga del inciso anterior.

e) Calcule la energía total almacenada en los capacitores. Compare el resultado con el del inciso anterior y trate de dar una justificación al mismo.

f) Basándose en los resultados de los ejercicios 6 y 7, explique las ventajas e inconvenientes de ambas conexiones.

2.7f) ¿Qué conexión es más conveniente para tensiones altas? ¿Qué disposición conviene para almacenar mayor cantidad de carga para la misma tensión aplicada?

2.8 La capacidad y tensión de ruptura de los capacitores de la fig.2.38 es:

C1=27μF, 350V

C2=33μF, 500V

C3=10μF, 200V

Determine el valor de la máxima d.d.p que se puede establecer entre los puntos A y B sin dañar algún componente.

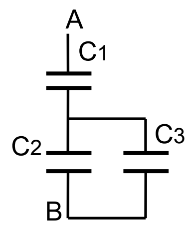


Fig.2.38

2.8) Para cada capacitor, exprese VA-VB en función de la tensión de ruptura correspondiente. El menor valor obtenido asegura que no se superará la tensión de ruptura en los restantes capacitores.

2.9 a) Para la actividad 2.2, tomando como referencia para la energía potencial la correspondiente a puntos muy alejados del objeto cargado, calcule la energía potencial de un electrón libre próximo al mismo.

b) Repita a) para un electrón libre infinitamente alejado del cuerpo. ¿Es la energía potencial del electrón mayor que en el caso anterior? Verifique si sus resultados concuerdan con la repulsión entre cargas de igual signo.

2.9) Cuando se trabaja con partículas, las energías suelen expresarse en eV (electrón-volt). Un eV es la energía que adquiere un electrón cuando se lo acelera con una diferencia de potencial de un voltio.

$$1eV = 1{,}6x10^{-19} J$$

2.10 a) Considere un objeto metálico A unido mediante un largo alambre conductor al terminal negativo de una fuente de 10V (fig.2.39a).

¿Cuál es la diferencia de potencial entre el objeto A y el terminal negativo de la fuente?

¿Cuál es la diferencia de potencial entre el objeto A y el terminal positivo de la fuente?

El cuerpo A ¿Tiene cargas en exceso?

b) Se agrega un segundo objeto metálico B, separado de A y unido mediante otro alambre conductor al terminal positivo de la fuente (fig.2.39b). Compare la diferencia de potencial entre B y A con la existente en extremos de la fuente de tensión. Los objetos A y B ¿tendrán cargas en exceso? En caso de tenerlas, ¿de dónde provienen?

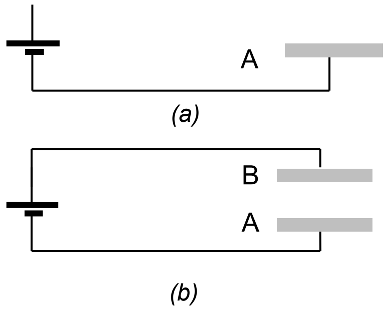


Fig.2.39

2.11 Dos capacitores, C1=12pF y C2=68pF se cargan conectándolos respectivamente a fuentes de 1000 V y 700V. Una vez cargados se desconectan de las fuentes utilizadas para cargarlos.

a) Se unen las placas positivas de ambos capacitores, como se muestra en fig.2.40.

¿Cuál es la diferencia de potencial entre placas de cada capacitor?

¿Existe diferencia de potencial entre las placas negativas de los mismos?

b) Con un alambre conductor se unen las placas negativas de ambos capacitores.

¿Se modificará la carga de cada capacitor?

¿Se modificará la carga total en el sistema?

Justifique las respuestas y calcule la carga final en cada capacitor y la diferencia de potencial entre sus placas.

2.10b) Cuando entre dos objetos hay una diferencia de potencial eléctrico, existe un campo eléctrico entre los mismos.

En el espacio entre placas planas los equipotenciales son rectas paralelas a las mismas, igualmente espaciadas. Las líneas de campo electrostático son perpendiculares a los equipotenciales, nacen en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

Con estas consideraciones, agregue al esquema algunas líneas de campo eléctrico y cargas al final y comienzo de las mismas.

Para comprender de dónde provienen dichas cargas deberá considerar si alguno de los dispositivos involucrados puede proveerlas.

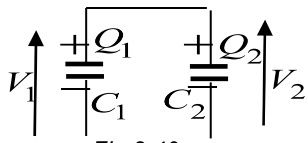


Fig.2.40

2.12 Resuelva el ejercicio anterior suponiendo que los capacitores se conectan de la manera indicada en fig.2.41.

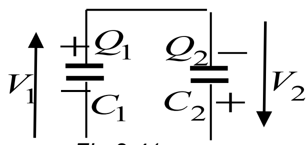


Fig.2.41

2.13 En una esfera metálica cargada el exceso de cargas se distribuye uniformemente sobre la superficie.

Considere una esfera metálica cargada de manera tal que el potencial de su superficie es 800V.

Los puntos interiores de la misma, ¿tendrán el mismo potencial o será diferente?

2.14 Repita el ejercicio anterior considerando un sólido conductor de forma irregular. ¿Se modifica alguna de las respuestas? ¿Pude asegurar que la distribución de cargas sobre la superficie sigue siendo uniforme? Explique.

2.15 ¿Se modifican las respuestas al ejercicio 13 si la esfera es hueca, como se indica en fig.2.42a?

Justifique las respuestas.

2.16 Considere un conductor hueco de forma irregular cuya superficie tiene -1250V de potencial eléctrico.

a) Las cargas en exceso:

¿Dónde se distribuyen?

¿De qué signo son?

¿Su distribución es uniforme?

b) ¿Puede asegurar el valor del potencial en puntos internos a la cavidad? Elabore una justificación a sus respuestas.

2.17 En fig.2.43 se esquematiza la intersección con el plano del dibujo de dos esferas metálicas concéntricas, la interna A maciza y la externa, B hueca. a) Se deposita una carga +Q sobre A.

¿B es eléctricamente neutra o tiene carga en exceso?

Indique el signo de la carga para:

La superficie interna de B

La superficie externa de B

La esfera B en su totalidad.

b) Dibuje algunos equipotenciales entre las esferas y en la región externa a las mismas y represente mediante líneas el campo eléctrico en la región, asignado 6 líneas para cada carga de valor Q.

2.18 Repita el ejercicio anterior después de haber conectado momentáneamente B a tierra.

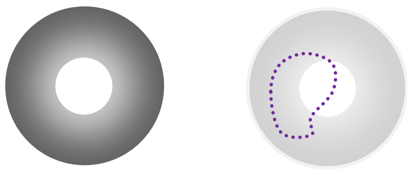
2.13-14) Recuerde que en los metales las cargas negativas pueden moverse con libertad y lo harán hacia regiones en que su energía potencial es menor.

Para estimar la redistribución de cargas sobre la superficie, dibuje algunos equipotenciales. Los más cercanos al conductor siguen la forma del objeto y los más alejados tienden a esferas centradas en el mismo. Las líneas de campo son perpendiculares a los equipotenciales y su intensidad es mayor donde están más próximos.

En el volumen 2 se comprenderá porqué la densidad de carga es proporcional a la componente de campo normal a la superficie del conductor.

2.15) Para que no exista desplazamiento neto de cargas libres en el interior del conductor, la fuerza sobre ellas debe ser nula.

Las definiciones de campo eléctrico y diferencia de potencial le ayudarán a resolver este ejercicio.



(a) *(b)*

Fig.2.42

2.15) Para demostrar que el campo eléctrico dentro de la cavidad es nulo considere una curva cerrada cualquiera como la dibujada en fig.2.42.b. En condiciones electrostáticas el trabajo para recorrerla es nulo.

Como en el tramo dentro del conductor el campo eléctrico es nulo (ejercicio 12), no se realiza trabajo en el mismo de modo que tampoco se deberá realizar trabajo para recorrer el tramo dentro de la cavidad.

2.16b) La justificación del ejercicio 14) no depende de la forma del conductor.

2.19 Tomando como referencia para los potenciales puntos infinitamente alejados de las esferas y suponiendo que la diferencia de potencial entre ambas es 200V, indique cuál de las siguientes opciones corresponde a la situación presentada en el ejercicio 17.

a) $V_A = 800$ V, $V_B = 1000$ V

b) $V_A = 200$ V, $V_B = 0$ V

c) $V_A = -1000$ V, $V_B = -800$ V

d) $V_A = 1000$ V, $V_B = 800$ V

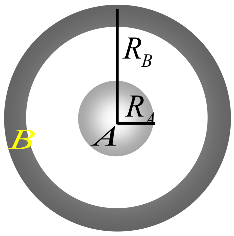


Fig.2.43

2.17b) Debido a la simetría del problema, las superficies equipotenciales son esferas centradas con los objetos metálicos.

Las indicaciones para el ejercicio 10b) pueden servir de ayuda para dibujar líneas de campo y ubicar las cargas eléctricas. Recuerde que la distribución de cargas sobre la superficie de una esfera metálica es uniforme.

2.20 De las opciones del ejercicio 19, dos corresponden a las respuestas para los ejercicios 17 y 18, otra corresponde a una condición que no es consistente con la elección de potencial cero en infinito. Explique cómo debe ser la carga de ambas esferas para la opción restante.

2.18, 19 y 20) El potencial aumenta en sentido contrario al campo eléctrico.

El campo eléctrico se dirige desde las cargas positivas hacia las negativas.

2.21 a) La esfera conductora A de fig.2.44 tiene un potencial de 2000V respecto de la esfera hueca B conectada a tierra. ¿Se inducen cargas en el objeto metálico C?

b) ¿Se modificará la respuesta anterior si el objeto B no está a potencial de tierra?



Fig.2.44

2.22 Cuando se carga un objeto metálico trayendo cargas desde muy lejos, el potencial del objeto se modifica proporcionalmente a la carga en exceso en el mismo. Debido a la dependencia de la capacidad con la forma del objeto, solo es posible encontrar una expresión matemática de la misma en casos de extrema simetría. La esfera es uno de estos casos y cuando su radio es R y está sumergida en vacío, su capacidad es:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{R}{\kappa_e}$$

2.21) Un conductor hueco conectado a tierra impide que cargas en el interior ejerzan su influencia sobre objetos externos. Resuelva primero el ejercicio 2.20.

a) Utilice esta expresión para determinar la cantidad de carga de una esfera conductora de 4,5 cm de radio cuando su potencial es de 1kV.

b) Otra esfera metálica, de 18 cm de radio y eléctricamente neutra, se coloca cerca de la esfera del inciso a), sin llegar a tocarla (fig.2.45a).

¿Se modificará el potencial de la esfera A? Nota: Considere una capacidad C para representar la influencia entre esferas (fig.2.45b).

2.23 Otro sistema en el que debido a la simetría existente es posible deducir fácilmente la expresión de la capacidad, es el capacitor esférico formado por dos esferas concéntricas. Denominando R_A y R_B a los radios de las esferas interior y exterior, la expresión de la capacidad resulta:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

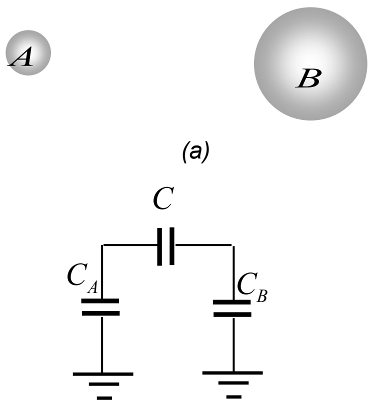
Las esferas de fig.2.46 de 4,5 y 9 cm de radio se cargan conectando una fuente a través del pequeño orificio practicado en la esfera exterior. Calcule la capacidad del sistema y utilice su valor para determinar la carga entregada por la fuente de tensión. Indique cómo se distribuye la carga en cada una de las esferas. ¿Se modificará la distribución de cargas si, una vez cargadas se retira la fuente?

2.24 A las esferas cargadas y aisladas de la fuente del problema anterior se les acerca una esfera conductora de 6 cm de radio cargada de modo tal que su potencial cuando se encuentra alejada de cualquier otro sistema es -1kV (Fig.2.47).

a) Las cargas en A y B, ¿mantendrán la distribución del ejercicio anterior?

b) ¿Se modificará la diferencia de potencial entre A y B?

c) ¿Se modificará el potencial de C?



(a)

(b)

Fig.2.45

2.22) b) Al acercar la esfera B a la esfera A las cargas en las superficies externas se redistribuyen (como sucede en fig.1.14a). Este efecto es tenido en cuenta con el capacitor C de fig.2.45b. Su valor no es conocido pero sirve para determinar si los potenciales se modifican. En esta figura el símbolo de tierra representa a los puntos infinitamente alejados respecto de los que se tomaron las cargas en la definición de las capacidades C_A *y* C_B *de las esferas.*

Recuerde que $C \to 0$ *cuando los objetos están suficientemente alejados de modo que no existe influencia eléctrica entre ellos y que* $C \to \infty$ *cuando ambos objetos entran en contacto (vea el ejercicio resuelto 2.3).*

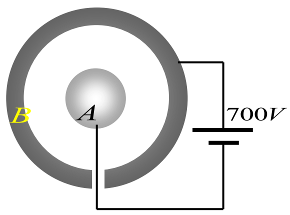


Fig.2.46

2.23) Los ejercicios 17 y 18 pueden servir de ayuda para determinar la distribución de cargas.

2.25 Para el sistema de fig.2.48, esquematice la distribución de cargas en exceso en A, B, C y D. Dibuje el circuito equivalente correspondiente (fig.2.48). Considerando que la fuente es de 100V y que la capacidad del sistema AC es de 33pF y de BD 22pF, determine la carga de cada objeto y su potencial referido al terminal negativo de la fuente.

2.26 Considere una fuente de tensión y cuatro objetos metálicos A, B, C, D unidos mediante alambres conductores de la manera indicada en fig.2.49.

a) Indique, de manera aproximada, la distribución de cargas en exceso en A y B y las inducidas en C y D. Suponiendo que cada extremo de la fuente inyecta una carga de magnitud Q al sistema, determine, en función de Q, la cantidad de carga en exceso en cada objeto.

b) Compare el potencial de C con el de A (mayor, menor o igual). Repita la comparación para los objetos C y D y para B y D.

c) Considerando que la fuente es de 100V y que la capacidad del sistema AC es de 33pF y de BD 22pF, dibuje el circuito equivalente correspondiente y determine la carga de cada objeto y el potencial referido al terminal negativo de la fuente.

2.27 En fig.2.50 se esquematiza un dispositivo donde portadores de carga eléctrica emitidos por un alambre caliente son acelerados hacia una placa metálica con un orificio central, mediante una diferencia de potencial V_b.

a) Indique el signo de las cargas para que puedan alcanzar la placa.

b) Expresando con m y q a la masa y carga eléctrica de los portadores y considerando que se liberan del filamento con energía cinética nula, exprese en función de V_a la velocidad con que atraviesan la placa por el orificio.

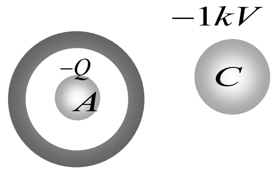


Fig.2.47

2.24) a) La esfera metálica B es una pantalla para los campos externos que solo redistribuyen las cargas sobre la superficie externa de B.

c) Calcule la capacidad y carga de cada objeto por separado y determine el potencial que se tendría si llegan a unirse.

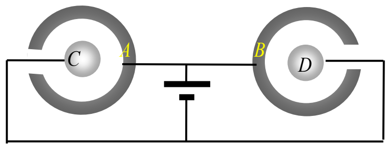


Fig.2.48

2.25) La fuente está conectada a cada una de las esferas de manera similar a la del ejercicio 23.

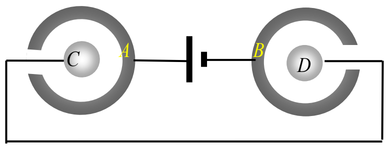


Fig.2.49

2.26) Suponga que se trata de esferas y el orificio de la externa es muy pequeño.

Antes de conectar la fuente los objetos están descargados. Al conectarla, el potencial de A sube respecto de C y D mientras que el de B baja.

La diferencia de potencial en la cavidad indica existencia de campo (electrostático) y por tanto de cargas que lo originan.

Estas consideraciones le permitirán justificar el circuito equivalente utilizado para la resolución.

c) Considerando que son electrones los portadores que abandonan el orificio de salida y se dirigen con velocidad constante en el sentido del eje de simetría del sistema, determine el tiempo que tardan en recorrer una distancia de 10 cm cuando la tensión aplicada es:

$c_1)\ V_a = 500V$

$c_2)\ V_a = 1kV$

$c_3)\ V_a = 10kV$

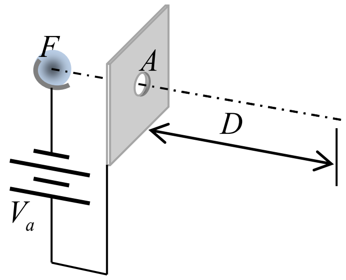


Fig.2.50

2.27) Según la teoría de la relatividad ningún objeto puede moverse a la velocidad de la luz, que en el vacio es $3x10^8\ m/s$.

A velocidades cercanas a ésta las expresiones de la mecánica clásica dejan de tener validez. Para responder el inciso c) utilizando las expresiones clásicas deberá verificar previamente si la velocidad de la partícula es inferior al 10% de la velocidad de la luz.

$|q| = 1,6x10^{-19}\ m/s$

$m = 9,11x10^{-31}\ kg$

$|q| = 1,6x10^{-19}\ C, \quad m = 9,11x10^{-31}\ kg$

2.28 Entre el filamento emisor y el ánodo del dispositivo del ejercicio anterior se introduce una rejilla metálica que puede considerarse como un plano equipotencial que permite el paso de partículas cargadas (fig.2.51). A determinada temperatura el filamento emite electrones con energías comprendidas entre 1,2 y 4 eV. El potencial del ánodo, V_A es de 100V pudiendo, el potencial de la reja, V_R tomar diferentes valores.

a) Determine la energía mínima que deben poseer los electrones emitidos por el filamento para alcanzar la pantalla para los siguientes valores del potencial de reja:

$a_1)\ V_R = -3V$

$a_2)\ V_R = -2V$

$a_3)\ V_R = -1V$

¿Se modificarán estos resultados si V_A toma otro valor, por ejemplo 200 V?

b) Para cada uno de los valores del inciso a) determine la energía con que los electrones llegan a la pantalla. ¿Se modificarán estos resultados si V_A toma otro valor, por ejemplo 200 V?

c) Complete el enunciado "Modificando el potencial de reja se controla:…." con alguna de las posibilidades indicadas en c1 a c4 y elabore una justificación.

c1) la velocidad de los electrones.

c2) la cantidad de electrones.

c3) ambas magnitudes.

c4) ninguna de ellas.

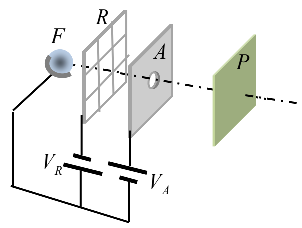


Fig.2.51

2.28) Un eV (electrón-volt) es la energía que adquiere un electrón al ser acelerado por una diferencia de potencial de un voltio.

$1eV = 1,6x10^{-19}\ J$

2.29 Para evaluar el comportamiento de dos estructuras separadas muy próximas entre sí, se fijan dos placas metálicas, una en cada estructura, dispuestas paralelamente y separadas inicialmente una distancia d_0.

La capacidad inicial de las mismas, medida con un instrumento apropiado es 100pF. Los valores obtenidos mediante mediciones realizadas diariamente fueron: 97, 93, 89 y 91pF. Determine la variación porcentual diaria de la separación entre estructuras.

2.30 Se desea estimar la capacidad de un sistema respecto del plano de tierra conectándolo a una fuente de tensión de 200V con el terminal negativo conectado a tierra. Una vez cargado se desconecta de la fuente y se mide la diferencia de potencial respecto al terreno obteniéndose 172 V. El instrumento utilizado es un voltímetro electrostático especialmente diseñado para minimizar las fugas a través de los soportes aislantes. La capacidad del instrumento respecto del plano de tierra es de 0,12nF. Esquematice la situación y determine el valor aproximado de la capacidad del sistema.

2.31 Un capacitor plano formado por dos placas conductoras paralelas mantenidas mediante soportes adecuados tiene una capacidad de 200pF cuando el espacio entre las mismas es aire.

Se conecta a una fuente de 500V y una vez cargada se desconecta. A continuación se llena el espacio entre las placas con un aislante observándose que la diferencia de potencial entre las placas cae inmediatamente a 130V. Determine la constante dieléctrica del aislante.

2.28b) Suponga que los electrodos son tres placas paralelas de modo que la intensidad de campo entre las mismas es uniforme. De esta manera, el potencial entre las placas varía linealmente y los electrones se comportan como pelotas lanzadas contra una valla como la de fig.2.52:

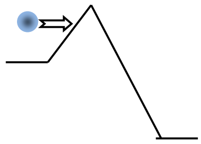


Fig.2.52

2.29) Nota: Utilice la expresión de la capacidad de un capacitor plano siendo d la separación entre sus placas.

Utilice para la variación porcentual:

$$\frac{\Delta d}{d}\% = \frac{d_{(dia\ actual)} - d_{(dia\ anterior)}}{d_{(dia\ \text{inicial})}} 100\%$$

2.31) La ecs.2.11 se obtuvo considerando que el dieléctrico es homogéneo, llena completamente el espacio entre placas y que las líneas de campo se distribuyen uniformemente en dicho espacio. Suponga que estas son las condiciones del problema.

2.32 Considere el capacitor plano de 200pF sin dieléctrico del problema anterior conectado a la fuente de 500V.

a) Calcule la carga y energía almacenada.

b) Manteniendo conectada la fuente de tensión, se triplica la separación entre placas desplazando muy lentamente una de las placas. Calcule los valores de carga y energía almacenada. ¿Son iguales a los anteriores?

c) En el intervalo de tiempo en que se triplicó la separación entre placas hubo un desplazamiento de cargas. Analice si la fuente de tensión tuvo que entregar o sacar cargas de las placas y determine el trabajo realizado por la misma.

2.33 El principio de los trabajos virtuales aplicado a la situación presentada en el problema anterior permite, además de determinar cómo se realiza el balance energético, calcular la fuerza entre placas de un capacitor cargado manteniendo la diferencia de potencial constante.

Aplicando una fuerza externa se produce un desplazamiento infinitesimal de las placas, originando variación de la energía almacenada en el capacitor y trabajo externo por parte de la fuente de tensión. Determine el trabajo mecánico realizado para separar las placas. ¿Es positivo o negativo? Exprese la fuerza que debe realizarse para separar las placas en función de la separación x entre las mismas.

2.34 Cuatro capacitores ideales se conectan como se indica en fig.2.53. Considere:

$V_b = 12\ V,\ C1 = C2 = C3 = 0,22\ \mu F,\ Cx = 0,33\ \mu F$

a) Se cierra el interruptor S1. Una vez alcanzado el equilibrio, Calcule la diferencia de potencial entre los puntos A y B de la figura.

b) Se abre S1 y se cierra S2. Alcanzado el equilibrio determine la diferencia de potencial entre los puntos x e y.

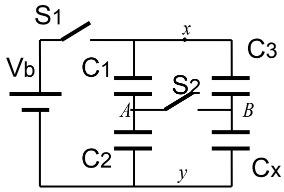


Fig.2.53

2.33) Recuerde que para separar dos objetos con cargas de diferente signo debe realizarse trabajo.

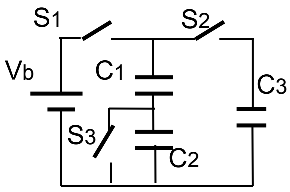


Fig.2.54

2.35) Considere $V_b = 300V, C_1 = 2\mu F, C_2 = 1\mu F$ y $C_3 = 4\mu F$

c) Calcule la carga en cada capacitor y verifique el resultado calculando la carga neta del equipotencial que comprende los puntos A y B.

2.35 Tres capacitores ideales se conectan como se indica en fig.2.54. Se cierra el interruptor S1.

a) Calcule la diferencia de potencial entre placas de cada capacitor una vez alcanzado el equilibrio.

b) Repita a) después de abrir S1 y cerrar S2.

c) Manteniendo cerrada S2, se cierra S3. Determine la carga y diferencia de potencial entre placas para cada capacitor.

d) Una vez alcanzado el equilibrio se abre nuevamente S3. Justificando la respuesta, indique si se modifica alguno de los valores calculados en b).

CAPÍTULO 3

CARGAS CON MOVIMIENTO CONSTANTE

CORRIENTE CONTINUA

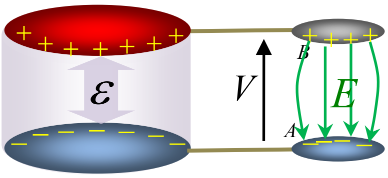
Uniendo con un alambre conductor los extremos de una batería, pasarán electrones desde la región de menor potencial hacia la de mayor potencial.

Como resultado del desplazamiento de portadores de carga eléctrica, la temperatura del material se eleva. Dependiendo del material y grosor del conductor empleado, la temperatura alcanzada puede ser suficiente para llegar a interrumpir la continuidad del camino conductor debido a que parte de la energía almacenada en la batería se convirtió en una cantidad de calor suficiente para fundir un tramo del alambre. Si no llega a fundirlo, la temperatura del material aumentará hasta estabilizarse en un valor que mantiene durante un intervalo de tiempo más o menos prolongado. Dependiendo de la energía almacenada en la batería utilizada, el alambre comenzará a enfriarse cuando la misma se agote y no pueda impulsar más cargas por el alambre.

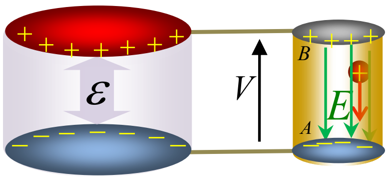
En uno u otro caso parte o la totalidad de la energía que estaba almacenada en la batería se convirtió en calor entregado al alambre.

Diferenciándose de las fuerzas conservativas consideradas en el capítulo anterior, en este caso estamos en presencia de fuerzas disipativas originadas en la oposición a la circulación de electrones ejercida por el medio conductor.

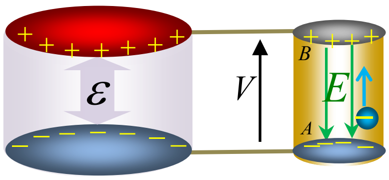
Aunque los circuitos de corriente continua, que son tratados en este capítulo, comprenden situaciones en las que el desplazamiento de cargas se realiza siempre en el mismo sentido y con velocidad constante, muchos de los resultados obtenidos son aplicables a situaciones en que estas magnitudes se modifican con el transcurso del tiempo y serán tratadas en capítulos posteriores.



a)



b)



c)

Fig.3.1

El movimiento al azar de los electrones libres, tendrá en promedio una componente en la dirección definida por la fuerza que los impulsa. La velocidad de este desplazamiento promedio está determinada por las características del material y por la intensidad de la fuerza impulsora.

Corriente eléctrica

Se denomina corriente eléctrica a la cantidad de carga eléctrica que fluye por unidad de tiempo a través de una sección transversal cualquiera de un conductor eléctrico.

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{ecs.3.1}$$

En el SI de medidas, la unidad de medida de la corriente eléctrica es el ampere, (A). Circula una corriente de un ampere, a través de una sección transversal cualquiera de un medio conductor (fig.3.2), cuando por ella pasa carga eléctrica a razón de un culombio por segundo.

Se adopta para la corriente eléctrica el sentido de circulación correspondiente a portadores móviles de carga positiva.

Los electrones, que son los portadores móviles en los metales, se desplazan en sentido opuesto al convencional adoptado para la corriente eléctrica.

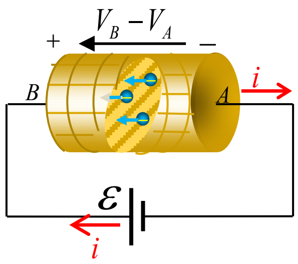
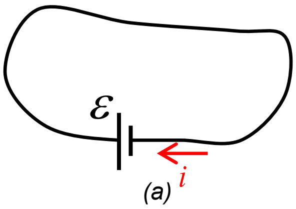
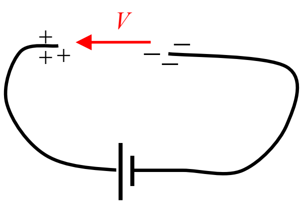


Fig.3.2

Para establecer una corriente continua debe existir un camino conductor cerrado o circuito eléctrico con una f.e.m. cuyo valor no se modifica con el transcurso del tiempo y que impulsa a las cargas por el mismo.



(a)



(b)

Fig.3.3

Fuerza electromotriz

En el capítulo anterior se denominó fuerza electromotriz al trabajo por unidad de carga que permite establecer una diferencia de potencial entre dos regiones separadas.

Cuando entre estas dos regiones existe un medio conductor, las cargas entran por un extremo y salen por el otro. Estas cargas son provistas por la fuente de tensión que establece la diferencia de potencial entre extremos del conductor y que, cuando se trata de corriente continua, mantiene constante.

La fuerza electromotriz (f.e.m.) es el trabajo por unidad de carga eléctrica realizado por una fuente de energía externa, para impulsar cargas por el circuito. Si en algún punto el circuito se interrumpe (fig.3.3b), se acumularán cargas hasta que la diferencia de potencial en dicha interrupción iguale a la f.e.m.

La falta de un tramo de circuito se puede interpretar como un capacitor en el que la acumulación de cargas origina una diferencia de potencial. Cuando la tensión en el capacitor iguala a la f.e.m. se llega a una situación de equilibrio en la que finaliza la circulación de corriente por el circuito.

Caída de potencial eléctrico

Conectando un alambre de material conductor homogéneo y sección transversal uniforme entre los terminales de una fuente de tensión, se comprueba experimentalmente que la diferencia de potencial entre puntos a lo largo del alambre y uno común varía linealmente (fig.3.4).

En la década de 1840 J.P. Joule utilizando un calorímetro, realizó una serie de experiencias mediante las cuales pudo comprobar, para diferentes materiales por los que hacía circular corriente eléctrica, que la energía involucrada en la "caída de potencial" se convierte en calor.

Si además se tiene en cuenta que la velocidad promedio de los portadores que constituyen la corriente eléctrica es constante por tratarse de corriente continua, se puede comparar al campo que impulsa la corriente por el material con el campo gravitatorio. La situación es similar a la de un paracaídas lanzado desde determinada altura en el campo gravitatorio. A medida que aumenta la velocidad de caída aumenta la oposición ejercida por el aire, alcanzando una velocidad constante cuando las fuerzas de rozamiento equilibran la atracción gravitatoria.

Por tratarse de movimiento a velocidad constante en un campo conservativo, la disminución de la energía potencial se traduce en un aumento en la temperatura del paracaídas. De igual forma, en el campo eléctrico que impulsa a las cargas por el conductor se puede asociar una parte de la energía a la posición, relacionada en términos eléctricos con la diferencia de potencial observada experimentalmente.

Además de las pilas y baterías, existen otros dispositivos que mantienen una tensión constante en el transcurso del tiempo y conocidos con el nombre de "fuente de tensión continua". La principal diferencia entre estos dispositivos está en los valores de corriente que pueden entregar y cantidad de energía disponible.

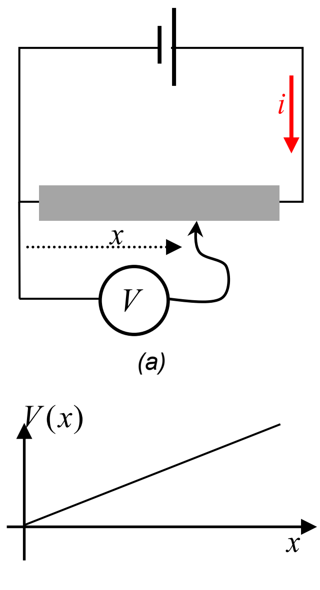


Fig.3.4

Campo eléctrico en un alambre con corriente

La posibilidad de medir diferencias de potencial a lo largo de un alambre por el que circula una corriente eléctrica implica que el campo eléctrico que impulsa a los portadores es un campo conservativo. En el capítulo anterior se asoció el origen del campo electrostático a cargas fijas. Si en la región existe alguna carga en movimiento, además de hacerlo de manera cuasi-estática, su magnitud deberá ser extremadamente pequeña.

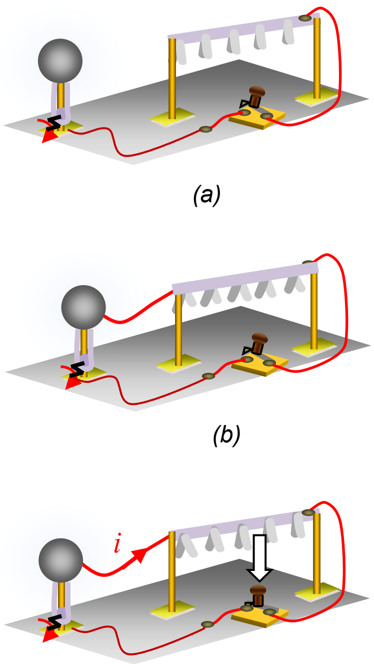
Aunque en corriente continua la velocidad promedio de las cargas en movimiento es muy pequeña, su cantidad no se puede despreciar y sus efectos no pueden ser ignorados. Por ejemplo, una corriente de 1A equivale aproximadamente a 6,25 $x10^{18}$ electrones moviéndose con velocidad promedio constante por el alambre.

El campo eléctrico que impulsa la corriente por una resistencia es un campo conservativo, permitiendo asociar el concepto de caída de potencial en la resistencia aún para corrientes variables en el tiempo.

Como sucede en la carga de un capacitor, inmediatamente después de cerrar el circuito formado por el alambre y la fuente de tensión, electrones son inyectados por la fuente por un extremo del alambre e igual cantidad lo abandona por el otro hacia el terminal positivo de la fuente. Como resultado, en un intervalo de tiempo extremadamente corto en que las condiciones no son electrostáticas, hay exceso de carga negativa en un extremo del alambre y exceso de carga positiva en el otro. Estas cargas muy rápidamente viajan hacia la superficie y se acomodan a lo largo del conductor permaneciendo en su posición mientras circula la corriente. Estas cargas fijas son las que originan el campo electrostático que impulsa a los electrones en su viaje a través de alambre y tiene asociado un potencial.

La utilización de un generador electrostático y un hilo levemente humedecido permite trabajar con el concepto de caída de potencial y comprobar la existencia de cargas a lo largo del alambre.

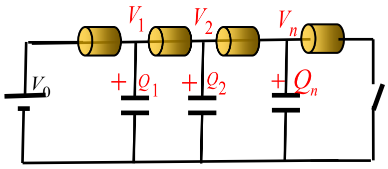
Ubicando sobre el hilo tiras de papel dobladas en forma de “V” (fig.3.5a), se observa desviación de las mismas cuando se conecta el hilo a un generador electrostático cargado (fig.3.5b). De manera similar a las hojas de un electroscopio, las cargas eléctricas sobre el hilo originan la separación de la tiritas de papel. En este caso, la desviación de las tiritas es la misma indicando que, al no circular corriente los diferentes puntos del hilo se encuentran al mismo potencial. Para que dicha desviación se origine en las cargas depositadas sobre el hilo y no por inducción, el generador electrostático debe estar suficientemente alejado del alambre bajo ensayo. Al cerrar la llave (fig.3.5.c), se establece un circuito permitiendo que los portadores alcancen la base del generador a través de la superficie de apoyo, al mismo potencial que el extremo del interruptor. La desviación de las cintas de papel deja de ser igual mostrando que en este caso la distribución de cargas a lo largo del hilo es diferente.



(a)
(b)
(c)
Fig.3.5

Distribución de cargas en un alambre con corriente

Se puede modelar la situación presentada en fig.3.5 considerando la capacidad que cada tramo del conductor tiene respecto a la mesa de apoyo.



(a)

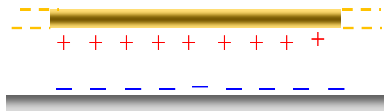

(b)

Fig.3.6

Estando el interruptor abierto, el hilo humedecido es un equipotencial donde las cargas se distribuyen de acuerdo a la capacidad de cada tramo (fig.3.6a). Denominando con V_i a la diferencia de potencial entre un punto i cualquiera del alambre y el terminal negativo de la fuente de tensión, se tiene:

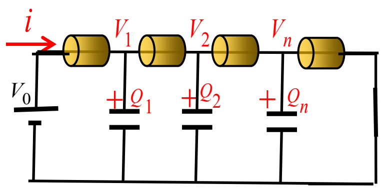
$$V_1 = V_2 = ... = V_i = ... = V_n$$

Considerando tramos elementales idénticos en puntos alejados de los extremos del largo conductor conectado a la fuente de tensión, la capacidad que cada tramo presenta respecto al plano de tierra será la misma. Como para cada capacitor la diferencia de potencial es la misma, se puede concluir que en la parte central del largo conductor la carga se distribuye uniformemente.

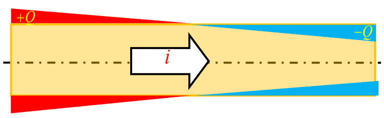
$$Q_1 = Q_2 = ... = Q_i = ... = Q_n$$

En fig.3.6b se esquematiza la distribución de cargas en la parte central del alambre y las inducidas en el terreno.

La fig.3.7a muestra el circuito equivalente cuando hay circulación de corriente, situación presentada en fig.3.5.c.



(a)



(b)

Fig.3.7

La misma experiencia puede realizarse reemplazando al generador electrostático por una fuente de tensión y utilizando, en lugar de las tiritas de papel, un voltímetro para medir la diferencia de potencial entre puntos del conductor respecto a una referencia común (fig.3.4). En ambos casos se observa que la diferencia de potencial entre cada punto y la base de apoyo disminuye a medida que se avanza por el hilo en el sentido convencional de la corriente eléctrica.

$$V_1 > V_2 > .... > V_i > .... > V_n$$

De esta manera la distribución de cargas en el alambre deja de ser uniforme.

$$Q_1 > Q_2 > .... > Q_i > .... > Q_n$$

La carga neta en el interior del conductor es nula mientras que en la superficie se distribuyen de acuerdo a la intensidad de corriente que circula y la forma del alambre.

Si circula corriente, algunas cargas son desplazadas hacia la superficie originando el campo que mantiene la corriente. Si en algún lugar se interrumpe el circuito, se modifica rápidamente la distribución de cargas superficiales anulándose junto con la corriente.

Para un largo alambre rectilíneo y lejos de sus extremos la distribución de cargas es lineal (fig.3.7b).

Conservación de la carga en circuitos con corriente constante

Se utilizó el término “corriente constante” para indicar que se trata de una corriente eléctrica fluyendo en el mismo sentido que mantiene inalterada su magnitud en el transcurso del tiempo, comúnmente conocida con el nombre de “corriente continua” o “corriente directa” (DC).

Para que la corriente en un circuito permanezca constante, las magnitudes eléctricas intervinientes, como la cantidad de carga en exceso en cada tramo del circuito, deben permanecer inalteradas en el transcurso del tiempo.

En fig.3.8, Q_0 representa la cantidad de carga encerrada por la región coloreada a la que, en determinado instante, llega una cantidad de carga q_1 y sale q_2 y q_3.

La carga total de la región Q en ese instante es:

$$Q = Q_0 + q_1 - q_2 - q_3$$

Para que no se modifique deberá cumplirse:

$$q_1 - q_2 - q_3 = 0$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} + \frac{dq_3}{dt}$$

Esto significa que la corriente que entra al nodo debe ser igual a la corriente que sale del mismo:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

De esta manera se puede afirmar que, cuando en un tramo de circuito concurren más de dos ramas, la corriente que llega al punto de bifurcación debe ser igual a la corriente que sale del mismo.

$$\sum i_{entran} = \sum i_{salen} \qquad ecs.3.2$$

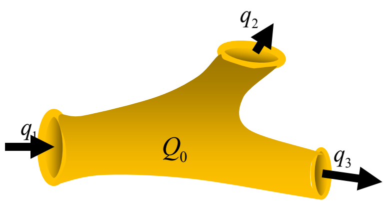
Como la ecs.3.2 se obtuvo suponiendo que todas las magnitudes permanecen inalteradas en el tiempo, este resultado solamente es aplicable en circuitos de corriente continua en estado estacionario.

En la segunda parte del libro demostraremos que dicha expresión también es válida cuando las corrientes que convergen en un nodo son variables en el tiempo. Por este motivo la utilizaremos en los capítulos siguientes para resolver circuitos en estado transitorio de corriente continua y estado estacionario de corriente alterna.

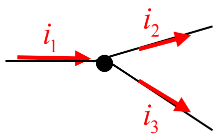
El resultado mostrado en fig.3.6b es una aproximación válida para la parte central de un largo alambre cargado.

Por tratarse de un conductor, las cargas se repelen acumulándose en mayor cantidad en los extremos que en la parte central, donde la distribución es aproximadamente uniforme.

En el Vol. II se determina de manera aproximada la distribución de cargas para este caso.



(a)



(b)

Fig.3.8

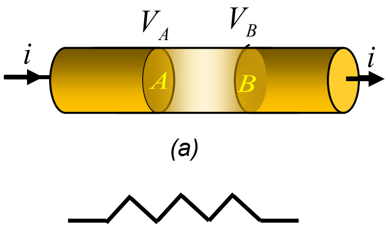
La corriente que llega a un nodo es igual a la que sale de él.

Resistencia eléctrica

Cuando se unen los extremos de una pila, batería o fuente de tensión continua con un conductor, se establece una corriente por el circuito formado, cuyo valor depende del material, forma del conductor y de la tensión aplicada. Intercalando al circuito un instrumento para medida de corriente, se comprueba que la corriente por el circuito mantiene el mismo valor en el transcurso del tiempo[1].

Cuando se establece un campo eléctrico en el material, aparece una fuerza sobre los portadores móviles. Si el medio no ofreciese oposición a su desplazamiento, como ocurre con una carga libre en el vacío, dicha fuerza originaría un movimiento con aceleración constante (fig.3.11), aumentando la corriente con el transcurso del tiempo. Como se trata de una corriente continua, la cantidad de portadores móviles a través de una sección transversal cualquiera del circuito tiene que ser la misma. Esto es posible si en promedio los portadores libres avanzan en el sentido de la corriente con velocidad constante. Por este motivo, para que la aceleración promedio sea nula deberá existir una fuerza de igual magnitud a la ejercida por el campo eléctrico, que se opone al avance de los portadores por el material de manera semejante al movimiento de una partícula en un medio viscoso (fig.3.12).

Establecida la corriente, a medida que los portadores libres avanzan por el conductor disminuye su energía potencial manteniéndose constante la energía cinética. La caída de potencial en el sentido de la corriente se debe a la disminución de energía potencial que se traduce en un incremento de la energía interna del material y en definitiva, de su temperatura. Se denomina resistencia eléctrica a la oposición que ofrece el medio material a la circulación de corriente. La resistencia eléctrica de un tramo AB de un medio conductor es la relación entre la caída de potencial en el tramo y la corriente que circula. La unidad de resistencia eléctrica en el S.I. es el ohmio y equivalente a una resistencia eléctrica entre cuyos extremos existe una diferencia de potencial de un voltio cuando es atravesada por una corriente de un ampere.



(a)

(b)

Fig.3.9

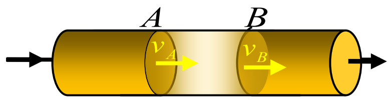


Fig.3.10

En corriente continua, la cantidad de cargas por unidad de tiempo que atraviesa las secciones transversales indicadas con A y B debe ser la misma. Como se consideró que la sección transversal del alambre es uniforme, la velocidad promedio de los portadores debe ser constante (fig.3.10).

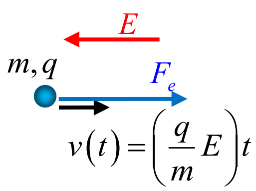


Fig.3.11

Una partícula cargada colocada en una región en la que existe campo eléctrico, será continuamente acelerada si no existe oposición a su movimiento.

[1] Este comportamiento se obtiene cuando el valor de la corriente no origina una modificación apreciable en la temperatura del material.

El símbolo del ohmio es la letra griega omega (Ω).

$$R_{AB} = \frac{V_A - V_B}{I} \quad (\Omega) \qquad ecs.3.3$$

Manteniendo constante la temperatura, se puede comprobar experimentalmente para conductores metálicos que la resistencia eléctrica depende del medio material y de la geometría del objeto considerado, siendo independiente de la diferencia de potencial entre sus extremos y de la corriente que la atraviesa.

En fig.3.9b se muestra el símbolo utilizado para representar una resistencia eléctrica.

Un resistor es el elemento de circuito cuya principal característica eléctrica es su resistencia eléctrica.

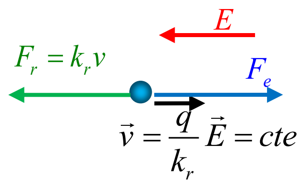


Fig.3.12

Imperfecciones en la red cristalina, átomos de materiales diferentes (impurezas) y vibraciones originadas por temperatura dificultan el avance de los electrones por el material.

En estado estacionario la fuerza impulsora ejercida por el campo eléctrico y la oposición al avance, proporcional a la velocidad de los electrones libres, se igualan. Como resultado, los portadores de carga avanzan con velocidad constante.

Ley de Ohm

De acuerdo a la ecs.3.3, cuando por un conductor de resistencia eléctrica R circula una corriente I, se produce una caída de potencial V:

$$V = IR \qquad ecs.3.4$$

Esta expresión se conoce con el nombre de ley de Ohm y es válida para los conductores metálicos a temperatura constante.

El modelo presentado en fig.3.12 permite considerar esta relación a nivel microscópico.

En fig.3.13 se muestra un trozo de material conductor de sección transversal uniforme por el que circula una corriente I. La misma puede considerarse formada por delgados hilos de corriente di. Cada hilo es recorrido por un grupo de cargas desplazándose con velocidad promedio v.

Denominando N al número de portadores móviles por unidad de volumen transportando una cantidad de carga q, la cantidad de carga desplazada en un tiempo dt es:

$$dq = NqvdtdA$$

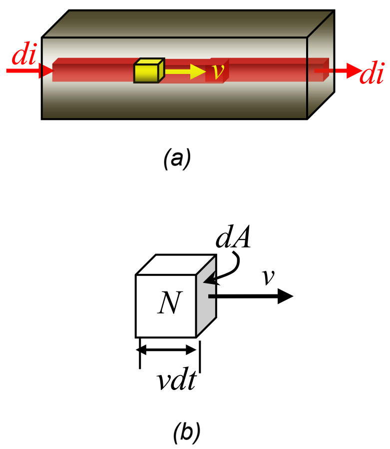


Fig.3.13

Resultando:

$$di = NqvdA$$

En fig.3.14 se muestra un plano S que es atravesado por la corriente.

Denominando dA (fig.3.14b) a la proyección de dS (fig.3.14a) sobre el plano S', normal a la dirección de la corriente que en definitiva es la dirección del campo eléctrico impulsor y teniendo en cuenta fig.3.14c,

$$dA = dS\cos\varphi$$

En notación vectorial resulta:

$$vdA = \vec{v}d\vec{S}$$

La corriente I a través de S, resultado de las contribuciones elementales será:

$$I = \iint_S di = \iint_S Nq\vec{v}d\vec{S}$$

Para el modelo propuesto, considerando la oposición ejercida por el medio material (fig.3.12) mediante una constante k_r, se puede expresar la velocidad de los portadores en función del campo eléctrico aplicado:

$$\vec{v} = \frac{q}{k_r}\vec{E} \qquad \text{ecs.3.5}$$

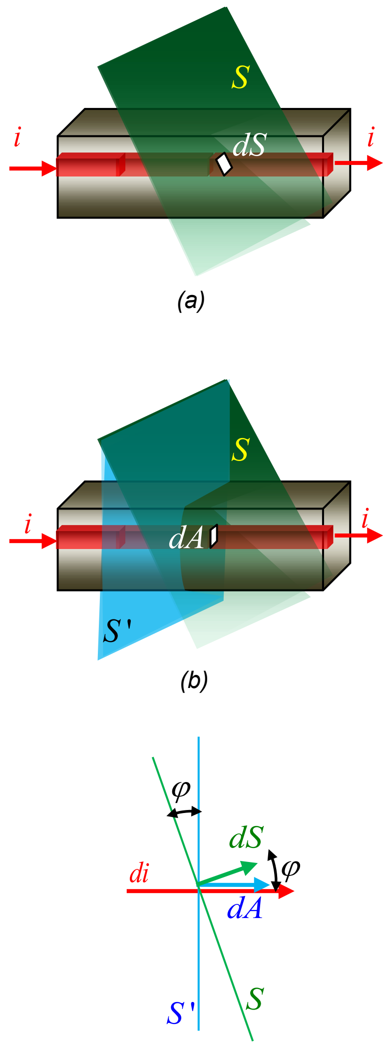
Reemplazando en la expresión de la corriente:

$$I = \iint_S \left(N\frac{q^2}{k_r}\right)\vec{E}d\vec{S}$$

El término entre paréntesis tiene en cuenta características del medio material y se denomina conductividad eléctrica.

$$\sigma = N\frac{q^2}{k_r} \quad \left(\frac{1}{\Omega m}\right) \qquad \text{ecs.3.6}$$

En un caso general, aunque la corriente toma el mismo valor para diferentes secciones transversales a lo largo del resistor, puede ocurrir que para puntos de una misma sección transversal la velocidad de desplazamiento de los portadores sea diferente. Una situación análoga se tiene con el agua que fluye por un canal al llegar a una curva. Las partículas desplazándose por la parte externa tendrán una velocidad mayor que en las internas (fig.3.15). La densidad de corriente eléctrica, $\vec{J}\left(A/m^2\right)$, considera la corriente a nivel local.



(a)

(b)

(c)

Fig.3.14

$$I = \iint_S \vec{J} d\vec{S} \qquad \textit{ecs.3.7}$$

Para cada punto del conductor, la expresión de ley de Ohm resulta:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad \textit{ecs.3.8}$$

Muchas veces, en vez de conductividad se utiliza la oposición que el material presenta a la circulación de corriente, denominada resistividad:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad \Omega m \qquad \textit{ecs.3.9}$$

En fig.3.16 se grafica la resistividad en función de la temperatura.

Conocido el valor de la resistividad y la pendiente de esta representación, es posible determinar el valor de la resistividad para una temperatura cualquiera dentro del intervalo de linealidad considerado.

En fig.3.16b se esquematiza la situación para un intervalo de temperaturas en el que puede considerarse variación lineal de la resistividad, indicando con subíndice 1 y 2 a los extremos del intervalo considerado.

El coeficiente térmico de resistividad α, representa la variación relativa de la resistividad frente a la temperatura:

$$\alpha = \frac{1}{\rho_1} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}\bigg|_{T_1} \qquad \left(\frac{1}{°C}\right)$$

De esta manera, conocida la resistividad para una temperatura de referencia T_0 se puede determinar su valor a una temperatura diferente mediante la aproximación:

$$\rho(T) = \rho(T_0)(1 + \alpha(T - T_0)) \qquad \textit{ecs.3.10}$$

Para un alambre recto de con resistividad uniforme ρ, longitud ℓ y sección transversal S, la resistencia es:

$$R = \frac{\rho \ell}{S} \qquad \textit{ecs.3.11}$$

Despreciando las deformaciones del material para el intervalo de temperatura en que la resistividad varía linealmente, se puede combinar ecs.3.10 y 3.11 resultando:

$$R(T) = R(T_0)(1 + \alpha(T - T_0)) \qquad \textit{ecs.3.12}$$

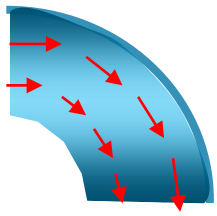
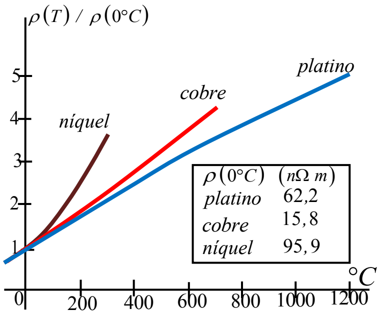
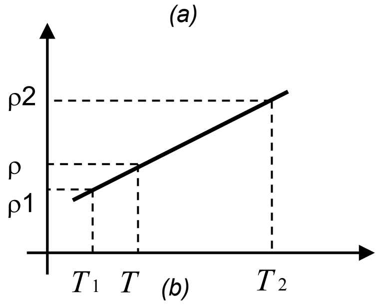


Fig.3.15



(a)



(b)

Fig.3.16

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{T_2 - T_1} = \frac{\rho - \rho_1}{T - T_1}$$

$$\frac{\Delta\rho_1}{\Delta T} = \frac{\rho - \rho_1}{T - T_1}$$

$$\rho(T) = \rho_1 + \frac{\Delta\rho}{\Delta T}(T - T_1)$$

$$\rho(T) = \rho_1\left(1 + \frac{1}{\rho_1}\frac{\Delta\rho}{\Delta T}(T - T_1)\right)$$

En el modelo de conductor (fig.1.6), electrones se mueven al azar con gran velocidad. En presencia de un campo eléctrico las trayectorias se desvían en dirección del campo aumentando la probabilidad de colisiones con el correspondiente incremento en la temperatura

Potencia en circuitos de corriente continua

En cada tramo de resistencia R de un circuito eléctrico por el que circula una corriente *I*, la caída de potencial ΔV en el sentido de circulación de la corriente es el resultado de la transferencia de energía eléctrica al material. La energía cedida por cada carga al caer ΔV resulta:

$$\Delta U = q\ \Delta V$$

Lo mismo ocurre para las demás cargas que constituyen la corriente por el circuito, siendo la energía transferida al medio material la suma de todas las contribuciones.

Como la caída de potencial es la misma para todos los portadores, el resultado es el mismo que se tendría si se considera la energía entregada por una cantidad promedio de carga Q que en determinado instante atraviesa una sección transversal cualquiera del conductor y recorre el tramo en que se produce dicha caída de potencial, resultando la velocidad con que se entrega energía al medio material o potencia disipada:

$$P_{disipada} = \frac{dU_{cedida}}{dt} = \frac{dQ}{dt}\ IR$$

Donde la velocidad dQ/dt con que fluye la carga por el circuito es la corriente por el mismo.

$$P_{disipada} = I^2 R \qquad \textit{ecs.3.13}$$

La energía entregada por la fuente a cada elemento de carga es:

$$dU_{fuente} = V_{fuente}\, dq$$

Para la carga promedio desplazándose por el circuito será:

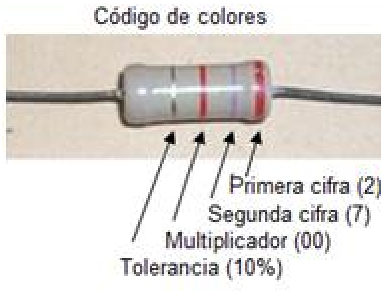
$$U_{fuente} = V_{fuente}\, Q$$

Resultando, la velocidad con que la fuente entrega energía al circuito

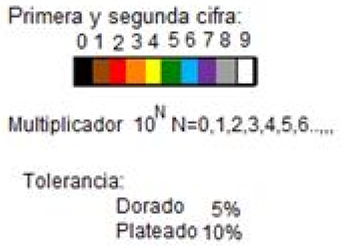
$$\frac{dU_{fuente}}{dt} = V_{fuente}\, I$$

Como la diferencia de potencial en bornes del resistor coincide con la entregada por la fuente, aplicando la ley de Ohm a la última expresión se puede comprobar que en este caso la totalidad de la energía disponible es transferida al medio.

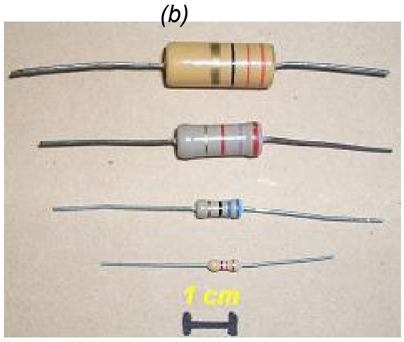
En los resistores comerciales se utiliza un código de colores para indicar sobre el cuerpo, el valor de su resistencia y tolerancia.



(a)



(b)



(c)

Fig.3.17

La disipación de energía se realiza por conducción a través de los terminales y puntos de apoyo, por convección del aire que rodea al resistor y radiación (calor, luz). Dependiendo del material con que se encapsula la resistencia, de su tamaño y superficie, se especifica la potencia máxima que puede suministrarse al resistor. La variación de resistencia para la sobreelevación de temperatura correspondiente, tiene que mantenerse dentro de la tolerancia especificada.

Circuitos con resistencias en continua

Conectando una resistencia a los bornes de una pila o batería, la corriente será el resultado de la f.e.m. disponible y de la resistencia eléctrica que el circuito ofrece.

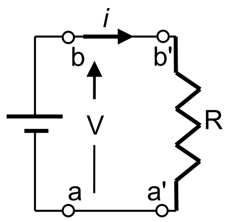
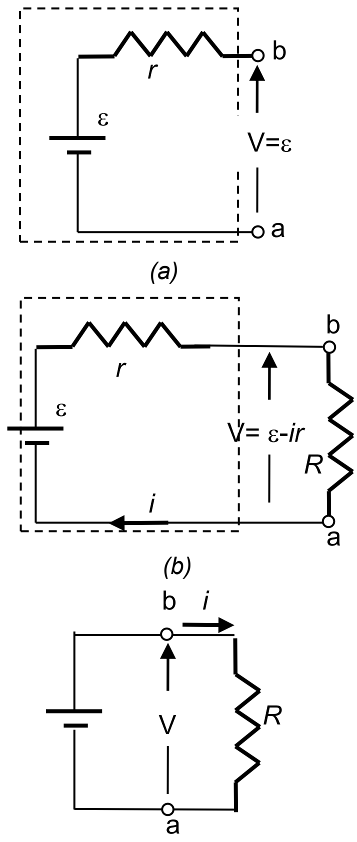


Fig.3.18

En fig.3.18, además de la caída de potencial en la resistencia R, existe una caída de potencial en el interior de la pila, interpretándose esta última mediante un término resistivo denominado resistencia interna de la pila. De ser necesario, se debe agregar una resistencia al lazo para tener en cuenta la caída de potencial en los cables de conexionado (tramos a-a' y b-b'). En fig.3.19a se muestra el circuito equivalente de una pila real, siendo r su resistencia interna y ε el valor de la fuerza electromotriz. La pila se encuentra a circuito abierto cuando sus terminales no están conectados a un circuito externo o el circuito presenta una interrupción. En estas condiciones, no circula corriente y la diferencia de potencial entre los terminales es igual a la fuerza electromotriz.

Para que circule corriente el circuito debe "cerrarse" formándose un lazo que además debe ser conductor eléctrico (fig.3.19b). Debido a la caída de potencial en la resistencia interna de la fuente, la tensión sobre la resistencia R conectada a la misma o "resistencia de carga", es inferior al valor de la f.e.m. Esta diferencia es directamente proporcional a la corriente por el circuito. Por este motivo, la tensión aplicada no tendrá variaciones significativas para cargas de diferentes valores si estos son suficientemente grandes con respecto a la resistencia interna de la fuente.



(c)

Fig.3.19

En muchos de los ejemplos tratados a continuación y ejercicios de final de capítulo se desprecia la resistencia interna de la fuente o se especifica la tensión en sus bornes para la corriente que circula por el circuito (fig.3.19c).

Conocida la potencia máxima se puede determinar la tensión máxima que puede aplicarse al resistor y la corriente máxima que puede atravesarlo.

$$V_{máx} = \sqrt{P_{máx} R}$$

$$I_{máx} = \sqrt{\frac{P_{máx}}{R}}$$

Circuito serie

Cuando existe un único camino entre dos puntos de un circuito, la corriente por los componentes es la misma, denominándose "conexión en serie" a la conexión de dichos componentes y "rama" al tramo de circuito correspondiente.

En fig.3.20 las resistencias R_1 y R_2 son atravesadas por la misma corriente eléctrica, repartiéndose la tensión V en las correspondientes caídas de potencial.

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

$$\frac{V}{I} = R_1 + R_2$$

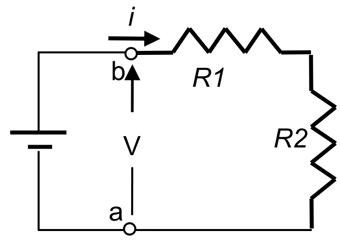


Fig.3.20

Ambas resistencias pueden reemplazarse por un único resistor de resistencia igual a la suma de los componentes de la serie, denominada resistencia equivalente serie.

$$R_{serie} = R_1 + R_2 \qquad \textit{ecs.3.14}$$

De igual forma, N resistencias en serie pueden ser reemplazadas por una igual a la suma de sus valores.

$$R_{serie} = \sum_{i=1}^{N} R_i \qquad \textit{ecs.3.15}$$

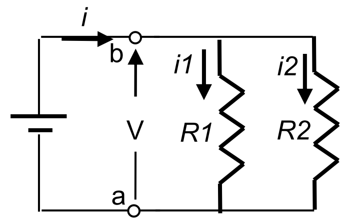


Fig.3.21

Circuito paralelo

En la conexión en paralelo, los extremos de las resistencias intervinientes se unen entre sí. Por este motivo, la caída de potencial en cada una de las resistencias en paralelo, es la misma. De acuerdo a la ley de Ohm:

$$I_1 = \frac{V}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2}$$

La corriente que ingresa al nudo es igual a la que sale del mismo:

$$I = I_1 + I_2$$

Resultando

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{paralelo}}$$

Dos resistencias en paralelo pueden ser reemplazadas por una resistencia equivalente.

$$R_{paralelo} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad \textit{ecs.3.16}$$

Cuando se propone la implementación práctica de un circuito eléctrico es necesario conocer el valor de los componentes a utilizar y las especificaciones que deben cumplir para que, en las condiciones en que será utilizado, funcionen correctamente.

La resistencia equivalente de dos en paralelo es igual al producto dividido la suma de sus valores.

Análogamente, para N resistencias en paralelo se obtiene:

$$\frac{1}{R_{paralelo}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i} \qquad \textit{ecs.3.17}$$

Puesto que la resistencia representa la oposición a la circulación de corriente, la ecs.3.17 representa la "conductancia" o facilidad para conducir una corriente eléctrica. Se representa con la letra G y su unidad de medida, en el S.I. es el Siemens (S). Para calcular la resistencia equivalente de N resistencias conectadas en paralelo se debe invertir la expresión anterior, resultando:

$$R_{paralelo} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}} \qquad \textit{ecs.3.18}$$

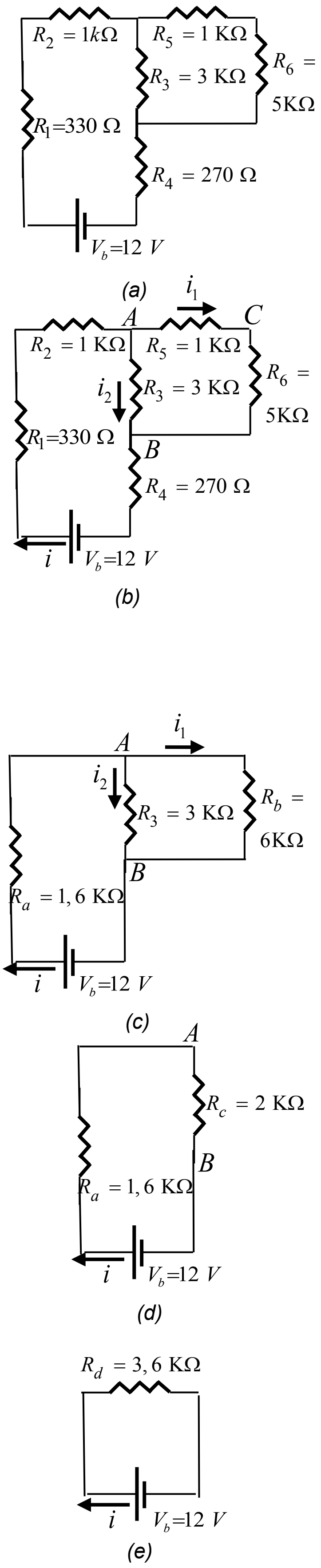


Fig.3.22

Métodos de resolución de circuitos en continua

Los circuitos más simples están constituidos por grupos de componentes en serie y paralelo alimentados por una fuente de tensión. En circuitos más complejos se forman lazos que pueden incluir algunas fuentes de tensión. En este capítulo se considerarán algunos circuitos con resistencias y capacidades. En capítulos posteriores se incorporarán otros componentes de circuitos intervinientes en el establecimiento de una corriente continua. Finalmente se trabajará con circuitos en corriente alterna. Los métodos utilizados en este capítulo, válidos para estado estacionario de corriente continua, sirven como punto de partida para el análisis general de circuitos.

Combinación serie paralelo

Es posible simplificar un circuito resolviendo las asociaciones serie o paralelo que puedan identificase, de manera similar a la empleada en el capítulo anterior.

Mediante el circuito de fig.3.22a se muestra un procedimiento para la determinación de la corriente y caída de potencial en cada resistencia.

Inicialmente se asignan las variables representativas de las corrientes en cada rama, eligiendo para las mismas un sentido arbitrario e identificando los nodos (fig.3 22b).

En el caso en que existan resistores en serie o en paralelo, el reemplazo por la resistencia equivalente simplifica la resolución del circuito.

En (fig.3. 22c) se reemplaza la serie R_1, R_2, R_4 por R_a y R_5, R_6 por R_b mientras que en fig.3. 22d se reemplaza el paralelo entre R_3 y R_b por R_c.

$$R_a = R_1 + R_2 + R_4 = 1{,}6\ K\Omega$$

$$R_b = R_5 + R_6 = 6\ K\Omega$$

$$R_c = \frac{R_3 R_b}{R_3 + R_b} = 2\ K\Omega$$

La serie entre R_a y R_c, denominada R_d, es la resistencia equivalente del circuito (fig.3. 22e).

$$R_d = R_a + R_c = 3{,}6\ K\Omega$$

Para calcular las corrientes y caídas de potencial, se recorren los esquemas de circuito en sentido inverso.

Comenzando por fig.3.22e se obtiene la corriente entregada por la pila:

$$I = \frac{V_b}{R_d} = \frac{12\ V}{3{,}6\ K\Omega} = 3{,}33\ mA$$

La caída de potencial entre los puntos A y B (fig.3. 22d):

$$V_A - V_B = IR_C = 6{,}7\ V$$

De fig.3. 22c

$$I_1 = \frac{V_A - V_B}{R_b} = 1{,}1\ mA$$

$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_3} = 2{,}2\ mA$$

La suma de estas corrientes es igual a la entregada por la fuente 3,33mA.

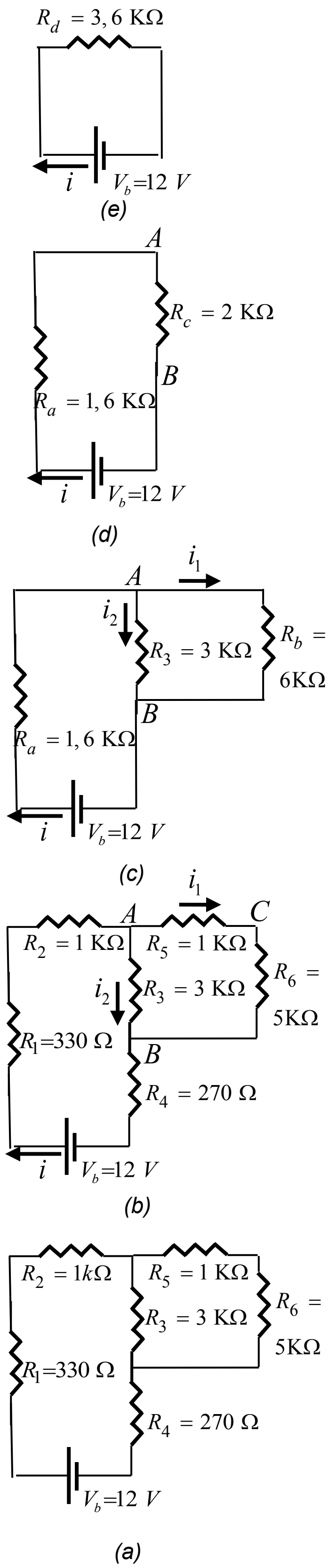


Fig.3.22bis

La caída de potencial en R_5 y R_6 fig.3.22b es:

$$V_A - V_C = I_1 R_5 = 1{,}1\ V$$

$$V_C - V_B = I_1 R_6 = 5{,}6\ V$$

El conocimiento de las corrientes permite determinar algunos valores de interés, como la potencia disipada en cada componente o la diferencia de potencial entre dos puntos del circuito.

La suma de ambas debe coincidir con $V_A - V_B$

A continuación se calcula la caída en cada una de las resistencias $R_1,\ R_2\, y\ R_4$.

$$V_1 = IR_1 = 1{,}1\ V$$

$$V_2 = IR_2 = 3{,}3\ V$$

$$V_4 = IR_4 = 0{,}9\ V$$

Pudiéndose comprobar que la suma de caídas de potencial en el lazo es igual a la tensión aplicada por la fuente.

$$V_1 + V_2 + (V_A - V_B) + V_4 = V_b$$

Reglas para la resolución de circuitos resistivos.

En un circuito de corriente continua la corriente que entra por un nodo debe ser igual a la que sale del mismo.

$$\sum i_{entran} = \sum i_{salen} \qquad \textit{ecs.3.19}$$

Esta expresión permite plantear las ecuaciones de nodos.

Para resolver un lazo o malla se considera que el trabajo por unidad de carga eléctrica realizado por la fuente de energía para mantener una corriente por el circuito, se reparte en las caídas de potencial a lo largo del mismo:

$$.\ \sum_{lazo} \varepsilon = iR \qquad \textit{ecs.3.20}$$

Obteniéndose a partir de la misma, las ecuaciones de malla o lazos. Para el ejemplo de fig.3.23 se agregó al circuito de fig.3.22 una rama conteniendo una pila y una resistencia.

Puede comprobarse que el método anteriormente utilizado no es aplicable en este caso siendo posible, mediante un conjunto de reglas conocidas con el nombre de reglas de Kirchhoff, plantear las ecuaciones necesarias para la resolución de éste y de circuitos eléctricos en general.

Los pasos a seguir son los siguientes:

En fig.3.24 se indica una posible convención para resolver los lazos. Independientemente de la convención adoptada (si es correcta), los siguientes pasos permiten resolver circuitos.

1_Reducir el circuito

2_Asignar las corrientes

3_Identificar los N nodos

4_M lazos independientes

5_ M ecuaciones de malla
N-1 ecuaciones de nodo

1_ Reducir el circuito resolviendo las series y paralelos si los hubiera. Este paso no es imprescindible pero ayuda a simplificar las ecuaciones (fig.3.23b).

2_ Asignar una corriente a cada rama. En la figura se elige arbitrariamente el sentido de la corriente asignándole una variable representativa.

3_ Identificar los nodos que son los puntos a los que concurren más de dos ramas (fig.3. 23c).

4_Contar el número de mallas o lazos linealmente independiente, es decir el número de lazos que contienen al menos un elemento que no es contemplado en los demás. En fig.3. 23d se muestran tres lazos y además se elige un sentido arbitrario en el que se recorrerá cada uno de ellos aplicando la ecuación de lazo correspondiente. Cualquier lazo cerrado es válido con la condición que tenga al menos un elemento que no haya sido tenido en cuenta. Si se agrega otro, por ejemplo el formado por R_6, R_3 y R_2, V_1 y R_7 la ecuación resultante será redundante.

5_Si M es el número de mallas linealmente independientes y N el número de nodos, se deberán plantear M ecuaciones de malla y N-1 ecuaciones de nodo.

En el caso presentado, tres ecuaciones de malla y tres de nodo permitirán determinar las seis corrientes.

6_Para resolver cada malla se utiliza la convención mostrada en fig.3.24a. Recorriendo la malla en el sentido elegido, si se encuentra primero el borne negativo de la f.e.m. (o de la fuente de tensión V), la misma irá con signo positivo en la ecuación de malla correspondiente.

Si al llegar a una resistencia la corriente asignada coincide con el sentido elegido parar recorrer el lazo, la caída iR en el segundo miembro de la ecuación de malla tendrá signo positivo.

7_ Para las ecuaciones de nodo simplemente considerar que las corrientes entrantes al nodo deben igualar a las salientes.

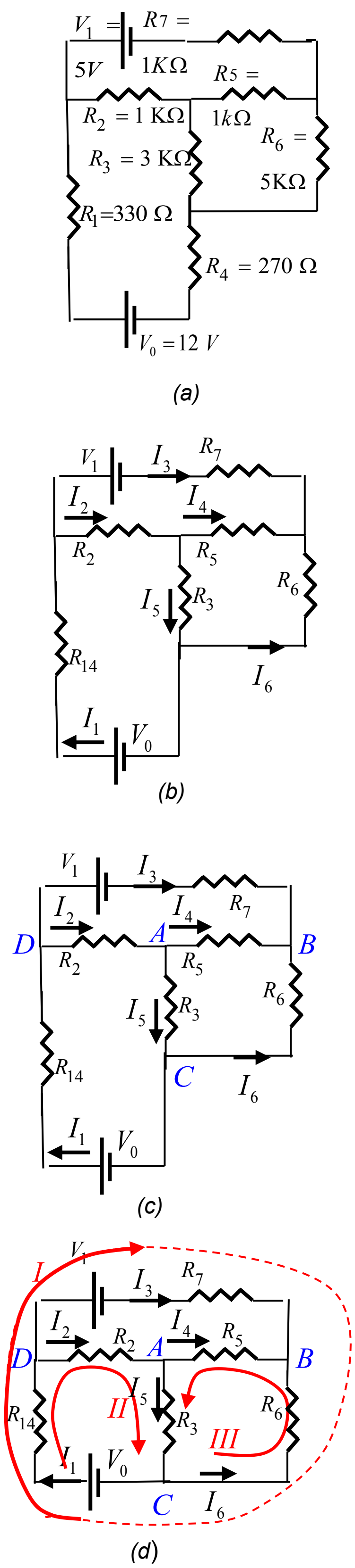


Fig.3.23

Aplicando estas reglas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones cuya resolución permite determinar las corrientes intervinientes en el circuito (fig.3.23d).

Ecuaciones de mallas:

$$I)\ V_0 - V_1 = I_1 R_{14} + I_3 R_7 - I_6 R_6$$
$$II)\ V_0 = I_1 R_{14} + I_2 R_2 + I_5 R_3$$
$$III)\ 0 = I_6 R_6 - I_4 R_5 + I_5 R_3$$

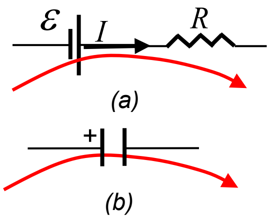


Fig.3.24

Ecuaciones de nodos:

$$A)\ I_2 = I_4 + I_5$$
$$B)\ I_3 + I_4 + I_6 = 0$$
$$C)\ I_5 = I_1 + I_6$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se puede determinar el valor de las corrientes por cada componente.

Para los valores de los componentes según fig.3.23a, se obtiene:

$$I_1 = 3{,}25\ mA \qquad I_2 = 3{,}48\ mA$$
$$I_3 = -0{,}23\ mA \qquad I_4 = 1{,}29\ mA$$
$$I_5 = 2{,}19\ mA \qquad I_6 = -1{,}06\ mA$$

A modo de ejemplo se determinará la diferencia de potencial entre el punto B y el borne positivo de la fuente de 12 V. En este caso se debe trabajar con el circuito original. fig.3.23a que se vuelve a presentar en fig.3.25 indicándose dos caminos posibles entre los puntos en cuestión.

Por cualquiera de estos u otros lazos a través del circuito que contengan a los puntos B y R, el valor obtenido para la diferencia de potencial entre estos puntos, debe ser el mismo.

Para el lazo mostrado en fig.3.25a la ecs.3.20 resulta:

$$0 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_4 R_5 + V_B - V_R$$

Si se sigue el camino de fig.3.25b, se tiene

$$-V_0 = -I_1 R_4 + I_6 R_6 + V_B - V_R$$

En ambos casos se obtiene

$$V_B - V_R = -5{,}83 \pm 0{,}01\ V$$

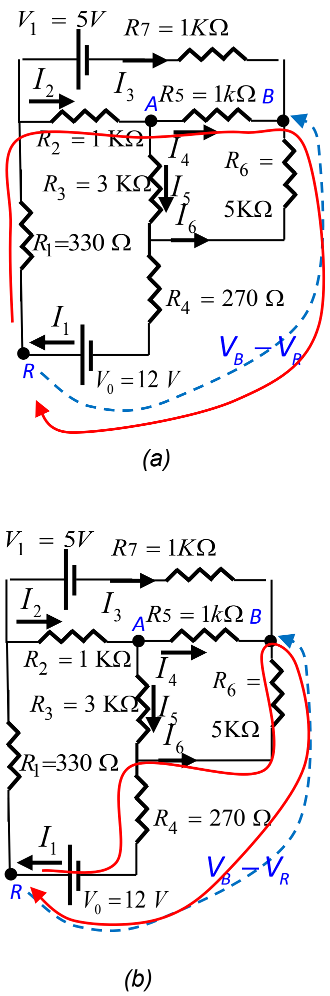


Fig.3.25

Reglas para la resolución de circuitos con resistencias y capacidades.

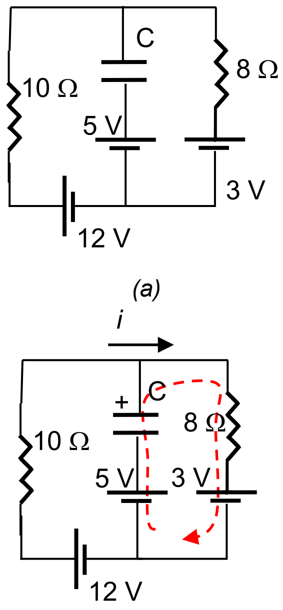
En circuitos donde además existen capacitores se deberá tener en cuenta la diferencia de potencial entre placas de cada uno de ellos en la ecuación de lazo correspondiente.

$$\sum_{lazo} \varepsilon = \sum_{lazo} \left(iR + \frac{q}{C} \right) \qquad \textit{ecs.3.21}$$

La polaridad de cada capacitor se asigna arbitrariamente. Cuando se recorre el lazo, si se encuentra primero el terminal positivo, la caída de potencial tendrá signo positivo (fig.3.24b).

Respecto a las ecuaciones de nodo, deberá considerarse que la carga de los capacitores no se modifica en estado estacionario y por lo tanto no circula corriente por los mismos.

Por ejemplo, para determinar la carga almacenada en el capacitor de 2,7 μF de fig.3.26 el único camino para la corriente continua será el lazo externo. Resolviéndolo, se obtiene que la corriente circula en sentido horario con una intensidad de 0,5 A.



(a) *(b)*

Fig.3.26

Para determinar la diferencia de potencial en el capacitor, se supone una polaridad para el mismo y se resuelve el lazo (fig.3.26b).

$$5 - 3 = \frac{-q}{C} + 0,5x8$$

Resultando la caída de potencial en el capacitor de +2V y su carga 5,4 μC. El signo positivo del resultado indica que la polaridad asignada coincide con su valor real. En caso contrario, el resultado sería el mismo pero con signo negativo.

Ejemplo de circuitos utilizados en la medición de magnitudes eléctricas

La posibilidad de conversión entre diferentes formas de energía por intermedio de la energía eléctrica, permite realizar la medición de magnitudes físicas, químicas y biológicas y actuar sobre las mismas.

Respecto a los instrumentos de medida, la determinación se realiza a partir de la corriente impulsada por la magnitud a medir o de la diferencia de potencial entre los puntos de medida.

Medida de corrientes

Se denomina amperímetro al instrumento utilizado para medir corrientes. Para realizar la medición, el instrumento se intercala en serie en la rama correspondiente como se muestra en fig.3.27a. El signo + junto a un terminal de conexionado del instrumento corresponde al punto por el cual para el sistema de indicación, la corriente ingresa al instrumento.

En fig.3.27b se reemplaza al instrumento por su resistencia interna R_A. Debido a la caída de potencial en el mismo, la corriente por el circuito se modifica.

Antes de conectar el amperímetro:

$$I = \frac{V_b}{R_1 + R_2}$$

Una vez incorporado un amperímetro de resistencia interna R_A;

$$I_{med} = \frac{V_b}{R_1 + R_2 + R_A}$$

Para que la modificación introducida en el circuito sea pequeña, su resistencia interna, debe ser pequeña con respecto a la resistencia de la rama correspondiente.

Los instrumentos especialmente diseñados para medir pequeños valores de corriente reciben el nombre de galvanómetros.

El alcance de un instrumento eléctrico de medida es el valor de la magnitud medida, en este caso una corriente, que produce la máxima indicación.

En algunos casos en vez de medir un valor de corriente, se desea detectar la anulación de una corriente. Para esto se utilizan los galvanómetros de cero, de gran sensibilidad, en los cuales el cero se encuentra en la mitad de la escala para detectar apartamientos a ambos lados del mismo. En ellos se especifica la desviación que produce la unidad de corriente, denominada sensibilidad, generalmente expresada en $div/\mu A$.

Se puede obtener un amperímetro ampliando el alcance de un galvanómetro mediante el agregado de resistencias en paralelo (fig.3.28). La corriente que ingresa al amperímetro se reparte entre la que circula por el galvanómetro y la que atraviesa la resistencia en paralelo. Como la diferencia de potencial en ambos componentes es la misma, se obtiene:

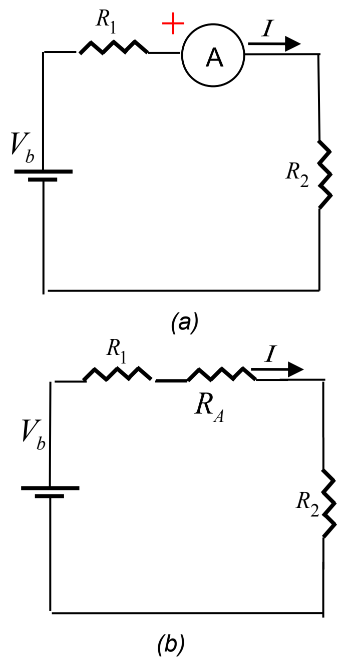


Fig.3.27

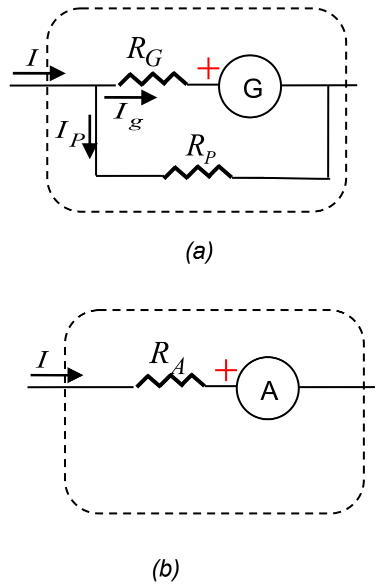


Fig.3.28

$$I_g R_G = (I - I_g) R_P$$

El valor de la resistencia R_P se elige para que el galvanómetro de alcance I_G desvíe a plena escala cuando la corriente que ingresa al amperímetro corresponda al alcance I_A del mismo.

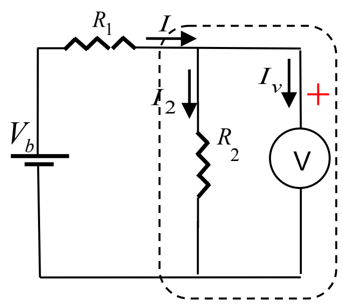
$$R_P = \frac{I_G R_G}{(I_A - I_G)}$$

Resultando la resistencia interna del amperímetro:

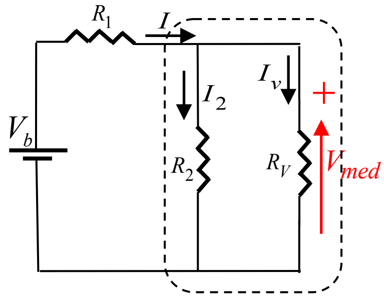
$$R_A = \frac{I_G R_G}{I_A} = \frac{R_G R_P}{R_G + R_P}$$

Medida de diferencias de potencial

Para medir diferencias de potencial, el voltímetro se debe conectar en paralelo a los puntos de medida (fig.3.29a), debiendo ser mínima la corriente por el instrumento para no alterar al circuito original de manera significativa.



(a)



(b)

Fig.3.29

La indicación del instrumento corresponde al potencial del borne marcado con el signo + referido al otro borne.

La caída de tensión en R_2 antes de conectar el instrumento de medida es:

$$V_2 = \frac{V_b R_2}{R_1 + R_2}$$

Con el voltímetro conectado se tiene:

$$V_{med} = \frac{V_b R_P}{R_1 + R_P}$$

Donde

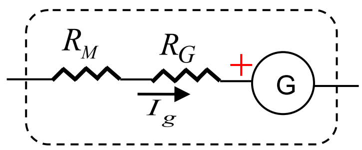
$$R_P = \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V}$$

Esta expresión permite comprobar que debe ser $R_V >> R_2$ para que la inserción del voltímetro no modifique de manera apreciable a la magnitud que se mide.

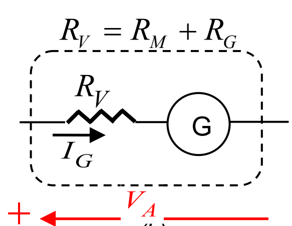
Cuanto mayor sea la resistencia interna del voltímetro, mejores serán las condiciones en que se realice la medida.

Es posible obtener un voltímetro de alcance V_A utilizando un galvanómetro y una resistencia en serie R_M (fig.3.30):

$$R_M = \frac{V_A}{I_G} - R_G$$



(a)

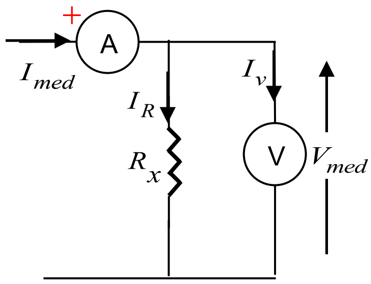


(b)

Fig.3.30

Medidas indirectas

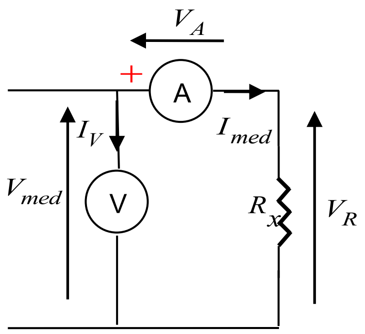
Utilizando amperímetros y voltímetros se puede medir de manera directa corrientes y tensiones. A veces puede determinarse el valor de una magnitud indirectamente, a partir de la medida de magnitudes relacionadas, como ocurre en la determinación de la resistencia eléctrica donde corriente y tensión se relacionan por medio de la ley de Ohm.



(a)

Denominando V_{med} e I_{med} a los valores de tensión y corriente indicados por los instrumentos de medida, se puede determinar el valor de la resistencia utilizando la siguiente expresión:

$$R_{med} = \frac{V_{med}}{I_{med}} \qquad \textit{ecs.3.22}$$



(b)

Fig.3.31

En fig.3.31 se muestran las dos maneras posibles de conectar los instrumentos para la determinación del valor de la resistencia según ecs.3.22

En fig.3.31a la tensión medida es igual a la caída de potencial en la resistencia incógnita mientras que la corriente medida es superior a la que circula a través de la resistencia.

$$I_{med} = I_R + I_V$$

$$I_{med} = \frac{V_{med}}{R_X} + \frac{V_{med}}{R_V}$$

$$R_{med} = \frac{R_X R_V}{R_X + R_V} \qquad \textit{ecs.3.23}$$

Para que el valor medido no difiera demasiado del valor de la resistencia incógnita, la resistencia del voltímetro debe ser de gran valor respecto al de la que está siendo medida.

$$R_V >> R_X$$

En el circuito de fig.3.31b la corriente medida por el instrumento es la misma que circula por la resistencia.

En este caso la tensión medida es la suma de las caídas de potencial en el amperímetro y en la resistencia incógnita.

$$V_{med} = V_R + V_A$$

$$V_{med} = I_{med}(R_X + R_A)$$

$$R_{med} = R_X + R_A \qquad \textit{ecs.3.24}$$

El circuito de fig.3.31a es útil para medir resistencias pequeñas mientras que el circuito de figura b es para medir resistencias de gran valor. El límite entre "grande" y "pequeña" es el valor de resistencia para el cual la diferencia entre el valor medido y el real de la incógnita es el mismo para ambos circuitos.

Para que el valor medido no difiera demasiado de valor real, la resistencia del amperímetro debe ser despreciable con respecto al de la resistencia incógnita.

$$R_A << R_X$$

El valor Rx_0 de la resistencia incógnita para el cual la influencia sobre la medida es la misma, independientemente del circuito usado, se obtiene igualando ecs.3.25 con ecs.3.26.

$$Rx_0 = \sqrt{R_A R_V} \qquad \textit{ecs.3.27}$$

El puente de Wheastone

Es un circuito formado por dos pares de resistencias en serie, en paralelo entre sí y con la fuente de alimentación (fig.3.32). Los puntos de unión entre cada una de las resistencias en serie, sirven como puntos de medida.

$$V_A - V_B = (V_A - V_N) - (V_B - V_N)$$

$$V_A - V_B = I_1 R_2 - I_2 R_4$$

$$V_A - V_B = V_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \qquad \textit{ecs.3.28}$$

La diferencia de potencial entre A y B depende del valor de las resistencias del puente. Este circuito puede medir la magnitud directamente o por comparación.

Método de cero

El instrumento colocado entre A y B es un galvanómetro muy sensible ajustándose el valor de las resistencias del puente hasta anular la indicación del mismo. En estas condiciones la diferencia de potencial entre los puntos A y B se anula. De ecs.3.28:

$$R_2 R_3 = R_1 R_4$$

Utilizando tres resistencias de valor conocido se puede determinar el valor de la cuarta.

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \qquad \textit{ecs.3.29}$$

Para el circuito de fig.3.31a, de ecs.3.23 se obtiene:

$$\left| R_{med} - R_X \right| = \frac{R_X^2}{R_X + R_V}$$

Como para esta configuración conviene $R_V >> R_X$

$$\left| R_{med} - R_X \right| \approx \frac{R_X^2}{R_V} \qquad \textit{ecs.3.25}$$

Si se utiliza el circuito de fig.3.31b, de ecs.3.24,

$$\left| R_{med} - R_X \right| = R_A \qquad \textit{ecs.3.26}$$

Para determinar el valor de una resistencia por este método, se arma uno de los circuitos y se realiza la medición. Si el valor obtenido es inferior al obtenido mediante ecs.3.27 y el circuito utilizado es el de fig.3.31a, ese valor es el más próximo al valor real de la magnitud medida. En caso contrario se debe armar el otro circuito y volver a realizar la medida.

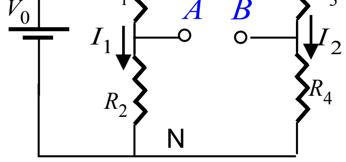


Fig.3.32

Método directo

En vez de ajustar el puente para corriente cero por el detector, se mide directamente la diferencia de potencial en los bornes de salida del puente utilizando un voltímetro de precisión con elevado valor de su resistencia interna. Este método es ampliamente utilizado para convertir diferentes magnitudes físicas en una diferencia de potencial eléctrico. Para ello, se utiliza, en lugar de R_4 un resistor cuya principal característica es la dependencia de su resistencia con la magnitud física a convertir. La misma puede ser temperatura, luz, deformación, etc.

Utilizando para $R_1, R_2 y R_3$ resistencias de precisión, se puede determinar el valor de una resistencia desconocida.

En los puentes de medida, $R_1 y R_3$ pueden modificarse por pasos múltiplo de diez siendo, la relación entre ambas, el factor por el que se multiplica el valor de R_2 con el que se llega a equilibrar el puente (ecs.3.29).

El método de oposición

Utilizando una pila patrón y una resistencia de precisión ajustable, es posible determinar la f.e.m. de una pila con mínima circulación de corriente. Identificando con subíndices P y X a los tramos del potenciómetro ajustable para las posiciones p y x del conmutador y estando cerrada la llave LL, se coloca el conmutador en la posición p y se presiona el pulsador Z durante el tiempo suficiente para observar desviación de la aguja del galvanómetro de cero.

El ajuste inicial del puente consiste en modificar la posición del cursor del potenciómetro de precisión hasta anular la indicación en el galvanómetro. Se repite la operación reduciendo el valor de R_S y modificando los valores de R_1 y R_2 hasta no observar desviación de la aguja del galvanómetro.

El equilibrio final se logra anulando la resistencia de protección. En estas condiciones R_{1P} y R_{2P}, en fig.3.33, representan los tramos de resistencia que permiten el equilibrio.

$$\varepsilon_P = \frac{V_b}{R_{1P} + R_{2P}} R_{1P}$$

ecs.3.30

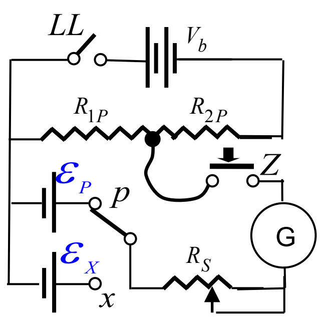


Fig.3.33

Llevando R_S a su valor inicial, se conmuta la llave a la posición x repitiéndose las operaciones anteriores hasta alcanzar la nueva posición de equilibrio, resultando:

$$\varepsilon_x = \frac{V_b}{R_{1x} + R_{2x}} R_{1x} \qquad ecs.3.31$$

En ambas expresiones el denominador representa la resistencia total del potenciómetro de precisión, de valor suficientemente alto para no modificar la tensión entregada por la fuente V_b durante toda la experiencia.

De las ecs.3.30 y 3.31, se obtiene la expresión que permite conocer el valor de la f.e.m. incógnita en función de la f.e.m. de la pila patrón y de la resistencia de precisión ajustable.

$$\varepsilon_x = \frac{R_{1x}}{R_{1P}} \varepsilon_P \qquad ecs.3.32$$

La resistencia de protección R_S debe tener un valor suficientemente alto de modo que al iniciar el equilibrio del puente no circule corriente que pueda afectar el valor de la f.e.m. de la **pila.**

Resistores

Cuando circula corriente por el resistor, el aumento de temperatura en su interior origina un flujo de calor a través del material hacia el exterior. La temperatura del componente se estabiliza cuando la velocidad con que ingresa energía, es igual a la velocidad con que es removida del dispositivo, que depende del material del cuerpo del resistor, de su tamaño y geometría. Por este motivo, los resistores se fabrican con tamaños diferentes acorde a la máxima potencia que pueden disipar $P_{máx}$. Este valor, especificado para temperatura ambiente de 25ºC, permite conocer la tensión o corriente que puede soportar el componente sin llegar a la destrucción. Como la temperatura en el interior del material también depende de la temperatura ambiente, la máxima potencia permitida en el resistor disminuye con ésta.

Así como la corriente por un circuito puede ser originada mediante la realización de trabajo mecánico o por la energía química almacenada en una batería para transformarse en calor transferido al medio, también puede utilizarse para cargar una batería o, como se verá a partir del próximo capítulo, para realizar un trabajo mecánico.

Conocida la potencia máxima se puede determinar la tensión máxima que puede aplicarse al resistor y la corriente máxima que puede atravesarlo.

Los valores con que se especifica la resistencia del resistor son aproximados, denominándose tolerancia el grado de aproximación. Por ejemplo, un resistor de 100Ω con una tolerancia de ±10% tendrá un valor comprendido entre 90 y 110Ω. Cuando el resistor se utiliza en circuitos de medida, se eligen aquellos con tolerancias de 0,1% o menos.

Debido a la dependencia del valor de la resistencia con la

temperatura, la variación producida debe ser inferior a la tolerancia del componente.

Los resistores de composición de carbón son los más utilizados en aplicaciones generales. De forma cilíndrica, consisten en un compuesto de carbón encapsulado en un aislante, indicándose el valor de la resistencia sobre el cuerpo del resistor mediante alguna codificación numérica o de color (fig.3.17b). En fig.3.17c se puede comparar el tamaño de estos resistores para potencias de ¼, ½, 1 y 2 W.

En resistores de varios MΩ de resistencia, altos valores del campo eléctrico pueden producir cambios, modificando de manera irreversible el valor de la resistencia, y en algunas ocasiones destruir al componente sin que llegue a la máxima disipación de potencia. Por este motivo, para este tipo de aplicaciones, se especifica el valor máximo de la tensión que puede soportar.

Para aplicaciones en las que la disipación de potencia en el resistor es elevada, se construyen resistores de alambre bobinado. Generalmente permiten disipar entre 5 y 200W.

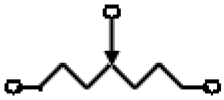
En algunos casos se utiliza una resistencia como elemento de ajuste. Por este motivo, se construyen resistores variables o potenciómetros para aplicaciones generales y de precisión.

Un potenciómetro es un resistor fijo con un tercer terminal que puede conectarse a puntos intermedios del mismo. En fig.3.34a se muestra el símbolo representativo utilizado en circuitos. Los de uso general se construyen de composición de carbón y de alambre enrollado. Los de carbón (fig.3.34b), con resistencias entre 100Ω y 1MΩ permiten manejar potencias desde 0,5W hasta 2W mientras que los bobinados se construyen en un rango de 2Ω a 50KΩ para potencias de 2 a 50W (fig.3.34c).

En aplicaciones que requieren exactitud en su valor, como en circuitos puente o para modificar el alcance de instrumentos de medida, se utilizan resistores de precisión.

Entre ellos se encuentran los resistores de película formados por una película metálica o de carbón depositado sobre una base aislante y los resistores de alambre de precisión formados por un hilo resistivo devanado sobre una base aislante (fig.3.35).

Los potenciómetros de precisión (fig.3.36) están formados por un bobinado de alambre de precisión dispuesto de manera helicoidal, requiriéndose según el modelo, tres o diez giros



(a)



(b)



(c)
Fig.3.34



Fig.3.35



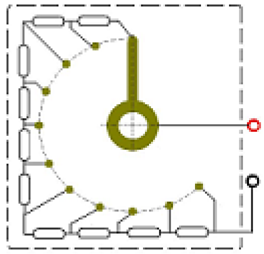
(a)



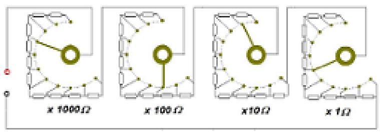
(b)
Fig.3.36

completos del eje para que el cursor recorra completamente al resistor. La posición del cursor se determina en un dial.

Es posible lograr variaciones de resistencia por pasos utilizando resistores de precisión seleccionados mediante una llave. En fig.3.37a se esquematiza una sección de una caja de resistencias utilizadas en el laboratorio, consistente en diez resistores de precisión del mismo valor, múltiplo de diez. Conectando varias décadas en serie como se muestra en fig.3.31b, se puede elegir el valor de la resistencia entre los terminales del dispositivo. El valor seleccionado en dicha figura es 7.295Ω.



(a)



(b)
Fig.3.37

Fuentes de tensión

Una fuente electrónica de tensión continua permite, de manera similar a una pila o batería, establecer una diferencia de potencial manteniendo una corriente continua por un circuito. En este caso obtiene la energía de la red eléctrica de distribución.

Al conectarla a un circuito circulará una corriente eléctrica cuya magnitud dependerá de la tensión entregada y de la resistencia del circuito.

Como ocurre con pilas y baterías, la tensión de salida de una fuente disminuye con la corriente entregada. Este efecto se debe a la caída de tensión en su resistencia interna que depende del tipo de fuente y de las condiciones de utilización a que ha sido sometida. El circuito de fig.3.19a representa el equivalente de una pila, batería o cualquier fuente de tensión continua. Expresando la tensión aplicada en función de la corriente se puede ver el efecto de la caída de potencial en la resistencia interna de la misma.

$$V = \varepsilon - Ir \qquad \text{ecs.3.33}$$

Además de la tensión a circuito abierto y resistencia interna debe tenerse en cuenta que la corriente entregada no supere el máximo valor especificado para la fuente. Superando el mismo, la caída en la resistencia interna toma valores importantes que pueden afectar el funcionamiento del equipo conectado a la fuente. Por otra parte, si esta no cuenta con un sistema de protección adecuado, pueden producirse daños en la misma. En tabla 3.1 se mencionan algunas diferencias entre las, baterías y fuentes de tensión.

Baterías	Fuentes de tensión
La energía disponible está almacenada en el dispositivo. Pueden volverse a cargar tomando energía de la red de distribución.	Toman la energía de la red de distribución eléctrica.
Además de la tensión se especifica la capacidad de carga, que es la cantidad de carga almacenada en Amper-hora.	Junto con la tensión se especifica la máxima corriente (o potencia) que puede entregar.
Para intervalos cortos de tiempo, el valor de la tensión se mantiene constante con fluctuaciones aleatorias casi imperceptibles. Para prolongados intervalos de tiempo, la tensión sobre la carga disminuye debido al envejecimiento de la batería.	Se superponen fluctuaciones rápidas a la tensión continua, como el rizado (ripple) relacionado con la tensión alterna de la red de distribución.
Dependiendo de la capacidad de carga, pueden suministrar corrientes elevadas en intervalos cortos, por ejemplo en el arranque de un automóvil o en un corto-crcuito.	Las más comunes permiten trabajar con baja corrientes. Requieren sistemas de protección contra corto-circuitos. Algunas poseen circuitos para limitación de corrientes.

Tabla.3.1

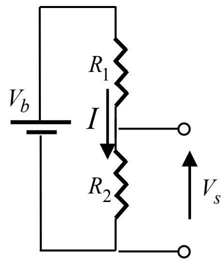
Divisor de tensión

La realización de experiencias con circuitos muchas veces requiere ajustar diferentes valores de la corriente o tensión aplicada. Una manera de lograrlo es utilizando una fuente electrónica regulada con ajuste de tensión y corriente. También es posible obtener diferentes valores de estas magnitudes a partir de una fuente de tensión continua simple o de una batería y un circuito divisor.

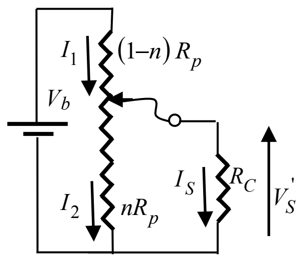
Utilizando una resistencia variable se pueden obtener diferentes valores de tensión a partir de una fuente de tensión fija. En fig.3.38a se muestra el principio de funcionamiento de esta disposición donde la tensión disponible a la salida del divisor a circuito abierto se relaciona con la de la fuente mediante la siguiente expresión:

$$V_S = V_b \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

ecs.3.34



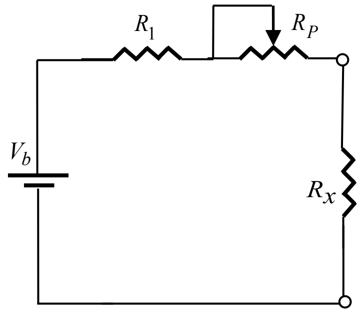
(a)



(b)
Fig.3.38

Es posible ajustar diferentes valores de la tensión aplicada a un circuito reemplazando R_1, R_2 por un potenciómetro de resistencia R_P. Desplazando el cursor entre 0 < n < 1, donde n=0 corresponde al cursor en la posición inferior de la fig.3.38b, se aplican diferentes valores de tensión sobre la resistencia equivalente del circuito conectado al divisor de tensión, R_C.

Para que la tensión aplicada a la carga no se modifique de manera apreciable frente a modificaciones en la carga, deberá elegirse $R_P << R_C$, estando limitado este valor por la máxima corriente permitida para la fuente.

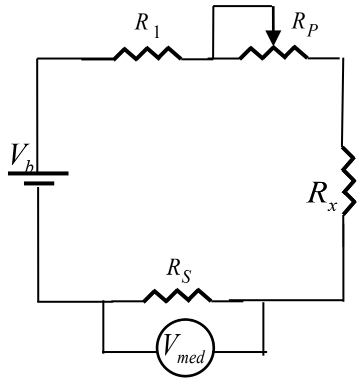


(a)

Ajuste de corriente

Las fuentes de corriente constante se utilizan en experiencias que requieren mantener el valor de la corriente aún para variaciones de la resistencia de carga.

Cuando el valor de la corriente requerida es considerable y la resistencia de carga muy pequeña, como ocurre en experiencias de generación de campos magnéticos (Capítulo 4), la utilización de baterías con alta capacidad de corriente con el agregado de una resistencia variable en serie (reóstato, fig.3.34c) constituye un reemplazo económico de la fuente de corriente.



(b)
Fig.3.39

Para el circuito de fig.3.39a, donde $R_1, R_P >> R_x$, ajustando el cursor del reóstato en una posición n, 0<n<1, se obtiene:

$$I = \frac{V_b}{R_1} \frac{1}{\left(1 + n\frac{R_P}{R_1}\right)}$$ *ecs.3.35*

Para medir la corriente entregada a la resistencia de carga se suele colocar una resistencia adicional R_S en serie con R_1 de valor suficiente para que la caída de potencial sobre ella pueda ser medida con un voltímetro de alta resistencia interna. En estas condiciones, la corriente entregada al circuito externo se determina de la siguiente forma:

$$I_{med} = \frac{V_{med}}{R_S}$$ *ecs.3.36*

Patrones de medida

El ampere es la unidad básica de medidas eléctricas relacionándose con los demás patrones fundamentales de medida a través de la fuerza entre espiras con corriente (Capítulo 4).

Se utiliza como patrón secundario de medida el valor de la f.e.m. de pilas cuyas características fundamentales son la repetitividad y elevada estabilidad.

Una referencia común es la pila patrón Weston que produce una f.e.m. nominal de 1,0186 V, con un corrimiento del orden de 30µV por año, y si es tratada con cuidado, su variación con la temperatura es menor a -10µV/°C, pudiendo considerarse que el valor absoluto del apartamiento del valor nominal de una pila patrón es menor que 1mV.



Fig.3.40

Para asegurar su exactitud se deben tener en cuenta ciertas precauciones:

-La máxima corriente no debe exceder 100µA.

-Se deben evitar golpes y vibraciones cuidando de no sacudir ni voltear la pila. Para máxima exactitud debe permanecer en reposo algunas horas antes de ser utilizada.

-La temperatura de almacenamiento de la pila debe estar entre 4 y 40°C.

-Las celdas patrón solo deben usarse en circuitos de cero.

Los patrones secundarios de medida de resistencia eléctrica generalmente son resistencias de alambre o cinta construidos con materiales de alta resistividad, valor estable, bajo coeficiente de temperatura y bajos potenciales de contacto. Entre estos materiales se encuentra la manganina que es una aleación de cobre, níquel y manganeso. También se utilizan aleaciones de cobre, níquel cromo y aluminio

Medida de resistencias

El óhmetro es un instrumento portátil simple para medida de resistencia utilizado en aplicaciones en las que no se requiere elevada exactitud (fig.3.41).

Denominando R_P al paralelo entre R_1 y el equivalente de la resistencia en serie entre la resistencia variable R_2 y la interna del galvanómetro, el valor de la resistencia incógnita R_X resulta:

$$R_x = R_P\left(\frac{V_0}{V_{med}} - 1\right) \qquad \textit{ecs.3.37}$$

Previo a la medida de una resistencia, se cortocircuitan los terminales de medida y se ajusta el potenciómetro R_2 de modo de obtener una indicación a plena escala de la aguja del instrumento. En estas condiciones $R_x = 0$ que corresponde a $V_{med} = V_0$.

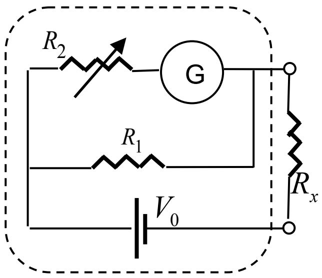
Si no se conecta resistencia alguna entre los terminales, al no circular corriente por el instrumento su indicación será nula.

$$R_X = \lim_{Vmed \to 0}\left(R_P\left(\frac{V_0}{V_{med}} - 1\right)\right) = \infty \qquad \textit{ecs.3.38}$$

Así, la indicación de fondo de escala corresponde a $R_X = 0$ mientras que cuando los terminales del instrumento se encuentran a circuito abierto la aguja indica $R_X = \infty$, mostrándose en fig.3.41b la escala resultante.

Valores de resistencias por encima de 10MΩ requieren tensiones mayores, entre 500 y 1000V, para producir corrientes detectables por el instrumento de medida.

Debido a esto para el detector, en lugar de un galvanómetro de imán permanente y bobina móvil, se utiliza un voltímetro con muy alta resistencia interna.



(a)

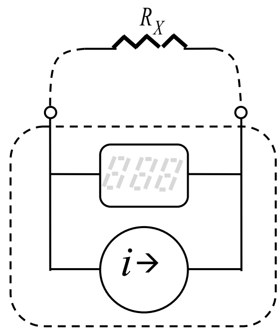


(b)

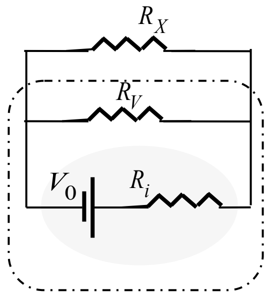
Fig.3.41

Para medidas de aislación eléctrica se utiliza el megóhmetro, instrumento similar al óhmetro simple que permite medir resistencias por encima del Tera Ohm (1TΩ= $10^{12}\Omega$).

Instrumentos que permiten mayor exactitud en la medida reemplazan la batería por un generador de corriente constante, realizándose la medida de la resistencia a partir de la determinación de la caída de potencial en la misma cuando por ella se hace circular una corriente conocida. En fig.3.42a se muestra un esquema del mismo. En el circuito equivalente de fig.3.42b se reemplaza la fuente de corriente constante por la parte sombreada en la que, los valores de la resistencia interna de la fuente R_i y del voltímetro R_V son suficientemente grandes frente a cualquier valor que pueda tomar R_X dentro del rango de medidas del instrumento.



(a)



(b)

Fig.3.42

En estas condiciones, el valor de la corriente sobre ella no se modifica de manera apreciable y se puede determinar su valor a partir de la relación entre la caída de potencial y la corriente.

$$R_X = \frac{V_{med}}{I_0}, \qquad R_X \ll R_V$$

Donde:

$$I_0 = \frac{V_0}{R_i} \qquad \textit{ecs.3.39}$$

Puente resistivo

La exactitud de un óhmetro puede ser mejorada utilizando el circuito puente de fig.3.32 con un detector de cero.

En el circuito de fig.3.43, R_x es la resistencia cuyo valor se desea determinar. Generalmente para R_1 y R_3 se utilizan cajas de resistores de precisión formadas por décadas seleccionables (fig.3.37) con valores tales como 1K, 10 K, y R_2 es un resistor ajustable con exactitud de 0,01% (Fig.3.36b).

Ajustando R_2 hasta anular la indicación del detector:

$$R_X = \left(\frac{R_3}{R_1}\right) R_2 \qquad \textit{ecs.3.40}$$

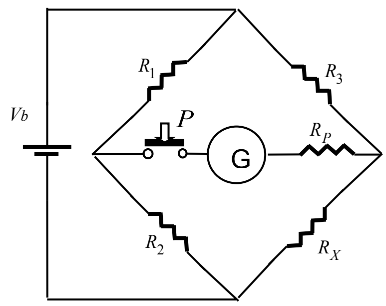


Fig.3.43

En este caso el error cometido en el valor de R_x es

$$e_{R_X}\% = e_{R_1}\% + e_{R_2}\% + e_{R_3}\% \qquad \textit{ecs.3.41}$$

El equilibrio final se tiene para $R_P = 0$.

Utilización de resistencias para monitoreo de magnitudes físicas

Existe gran cantidad de aplicaciones en que se utilizan circuitos eléctricos para monitoreo y control de magnitudes físicas, químicas y biológicas. Debido a su amplia utilización en diferentes ramas de la Ingeniería se mencionan algunos ejemplos que pueden ser comprendidos utilizando los conceptos tratados en este capítulo.

En el ejercicio 3.26 al final del capítulo se propone una aplicación para medición de temperatura basada en la dependencia de la resistencia eléctrica con la temperatura (ecs.3.12).

Esta dependencia también es utilizada para la determinación de otras magnitudes físicas. A modo de ejemplo, el medidor de flujo másico basado en el anemómetro de hilo caliente (L.King,1914) utiliza un puente de Wheatstone para medición y control del flujo de un gas (fig.3.44).

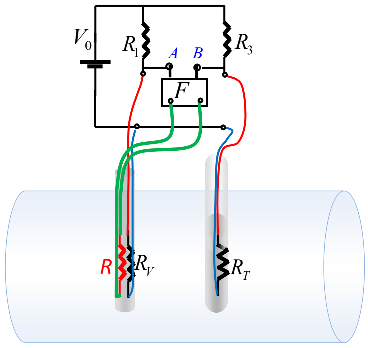


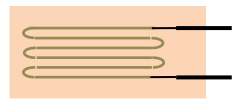
Fig.3.44

El método de medida se basa en la utilización de dos sensores sumergidos en el fluido cuyo flujo se desea medir. Uno de los sensores, R_V, está montado junto con la resistencia calefactora R alimentada por una fuente externa controlable F. El otro, R_T, mide la temperatura del gas y se utiliza como referencia. Ambos sensores forman parte del puente como se muestra en la figura, utilizándose la diferencia de potencial para controlar la potencia entregada al hilo calefactor. De esta manera el sistema mantiene constante la diferencia de temperatura entre los dos electrodos en un valor prefijado. Si aumenta la velocidad con que fluye el gas, el hilo comenzará a enfriarse disminuyendo la resistencia del primer sensor. La modificación en la diferencia de potencial en la diagonal del puente actúa sobre la fuente de potencia incrementando la corriente entregada al hilo hasta que la diferencia de temperatura entre sensores sea la prefijada.

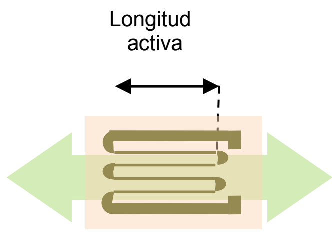
De esta manera, la velocidad del flujo en la tubería se relaciona con el valor de la corriente entregada al hilo calefactor que se utiliza además como indicación del instrumento. Como la transferencia de calor entre el hilo caliente y las moléculas de gas depende de su conductividad térmica, densidad, viscosidad y capacidad calorífica, cada medidor debe ser calibrado de acuerdo al uso a que estará destinado. Estos dispositivos son utilizados en una amplia gama de aplica-

ciones industriales, de control de procesos y en aquellas en que los gases fluyen por tubos y conductos.

Existen aplicaciones basadas en la variación de la resistencia al someter el resistor a esfuerzos (Lord Kelvin, 1856). Teniendo en cuenta que al aumento en la longitud del conductor le corresponde una disminución de sección (Poisson) y como la resistividad de los metales, además de depender con la temperatura, depende de la presión a que está sometido el material (Birdgman,1917), se construyen dispositivos utilizados para la medida de tensiones y deformaciones (galgas extensométricas resistivas).



(a)



(b)

Fig.3.45

En fig.3.45a se esquematiza una galga de filamento en la que el elemento sensible es un delgado hilo conductor metálico (aleaciones de níquel con cobre o cromo) sobre un soporte aislante. En fig.3.45b se reemplaza el hilo por una película conductora depositada sobre un sustrato aislante. Debido al ancho de las pistas de conexión y dobleces, la resistencia de los mismos no se modifica de manera apreciable frente a una solicitación, por este motivo en estas galgas la longitud activa está bien determinada.

Diferentes formas de energía se transforman en otras por intermedio de una corriente eléctrica necesitando muchas veces la ayuda de un aliado: el campo magnético. Juntos permiten convertir magnitudes físicas, químicas, biológicas, etc. en magnitudes eléctricas y recíprocamente convertir energía eléctrica en otras formas de energía posibilitando su medición y control.

ACTIVIDADES

3.1 Se dispone de una fuente de tensión de 5V y resistencia interna 1Ω. Determine la corriente por el circuito formado al conectar una resistencia R entre los terminales de la fuente, cuando

a) R=1KΩ

b) R=270 Ω

c) R=0,5 Ω

1) La tensión especificada es la de circuito abierto.

3.2 Considerando que se dispone resistencias de ¼, ½, 1 y 2 W, para las diferentes situaciones presentadas en el ejercicio anterior determine la potencia disipada y utilice el resultado para realizar la elección del resistor en base a su disipación.

Cuando el resultado obtenido no permita la elección dentro de los valores disponibles, deberá indicar la especificación de potencia que sería necesaria para dicho componente.

2) Para minimizar el espacio ocupado elija en cada caso el de menor potencia cuidando que la potencia disipada no se aproxime demasiado al valor especificado. Calcule la relación porcentual entre la potencia disipada y el valor especificado y utilice el resultado para elegir el componente.

3.3 Calcule la indicación que tendría un voltímetro de 10KΩ de resistencia interna conectado en extremos de cada resistor del ejercicio 3.1.

3.3) Indique el resultado en V, con dos decimales.

3.4 Considere que la fuente utilizada en el circuito de fig.3.3b tiene una f.e.m. de 1,28V y resistencia interna de 500Ω.

a) Indique el valor de la tensión V y elabore una explicación sencilla para la respuesta dada.

b) ¿Depende la respuesta anterior del valor de la resistencia interna de la fuente?

c) Se utiliza un voltímetro de 2V de alcance y resistencia interna10KΩ. Calcule el valor de la medida realizada.

3.4c) Indique el resultado en V, con tres decimales.

Para ponderar la influencia del voltímetro en la medida calcule la relación porcentual entre la diferencia encontrada con el valor teórico y éste.

3.5 Repita el ejercicio 3.3 considerando que los cables de conexionado entre la fuente y el resistor presentan una resistencia de 0,85Ω.

3.6 Se desea ensayar el circuito fe fig.3.46 para ello se debe determinar si se puede utilizar alguna de las fuentes de tensión disponibles.

a) Calcule la resistencia entre los puntos A y B del circuito. Considere todas las resistencias iguales a 10Ω.

b) Determine la corriente que debe entregar la fuente y la potencia entregada al circuito si las especificaciones de la fuente son:

b1) 5V, 100mA

b2) 2V, 2W

b3) 15V, 0,5A.

c) Basándose en los resultados obtenidos en b) decida si puede utilizar alguna de las fuentes de tensión disponibles y realice la elección de la misma.

3.7 Se carga una batería de 12 V durante 90 minutos con una corriente constante de 2,5 A.

a) Calcule la cantidad de carga acumulada en la batería.

b) Calcule la energía entregada durante la carga de la batería.

3.8 Se desea utilizar un conjunto de capacitores conectados en paralelo para almacenar carga eléctrica. a) Determine la cantidad de capacitores de 4700μF necesarios para almacenar la misma cantidad de carga que la entregada a la batería del problema anterior. Considere que en estado estacionario la tensión en los mismos es 12 V.

b) Calcule la energía almacenada en los capacitores.

3.9 Suponiendo que la carga almacenada en la batería del ejercicio 3.7 se utilizó para cargar los capacitores del ejercicio 3.8, compare las respuestas a los inciso b) de ambos ejercicios e intente una explicación al resultado de dicha comparación.

3.5) Para valores pequeños de la resistencia de carga la influencia de los cables utilizados y estado de las conexiones no se puede despreciar.

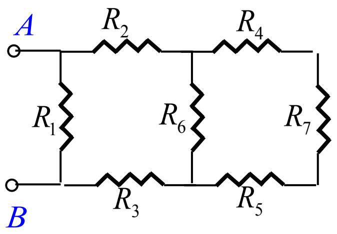


Fig.3.46

En los instrumentos con indicación analógica, el valor de la magnitud medida se obtiene a partir de la posición de una aguja sobre una escala graduada, denominándose alcance del instrumento al valor de la magnitud medida que produce una indicación de fondo de escala.

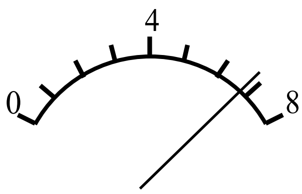


Fig.3.47:

Indicación analógica

$$Factor\ de\ escala = \frac{Alcance}{N°\ de\ div\ de\ la\ escala}$$

Ejemplo: La fig.3.47se refiere a la indicación obtenida con un alcance de 200V. Determine el valor de la magnitud medida.

$$Factor\ de\ escala = \frac{200}{8} = 25\left(V/div\right)$$

$$V_{medido} = 6{,}7\ div\ x\ 25\ \ V/div = 167{,}5\ V$$

$$\Delta V_{medido} = \pm 0{,}1\ div\ x\ 25\ \frac{V}{div} = \pm 2{,}5\ V$$

$$e\%_{lectura} = \frac{\Delta V_{medido}}{V_{medido}} x100\% = \pm 1{,}5\ \%$$

3.10 Las especificaciones de determinada fuente de tensión indican que la tensión a circuito abierto es 5V, la máxima corriente que puede entregar de manera continua sin dañarse es de 3A y la corriente que circula al unir momentáneamente sus terminales de salida es de 100A.

Calcule la tensión sobre extremos de la resistencia más pequeña que se puede conectar a este dispositivo de acuerdo a sus especificaciones. ¿Qué valor tiene dicha resistencia?

3.11 La tensión de una fuente a circuito abierto de 2,05V se reduce a 1,98 cuando se conecta a la misma una resistencia de 27Ω.

a) Calcule la corriente entregada por la fuente.

b) Calcule el valor de la tensión y corriente si se conecta en paralelo con la carga una resistencia de 22Ω.

3.12 a) Considerando que las fuentes de tensión en el circuito de fig.3.48 son recargables, determine cuales están entregando energía al circuito cuando están siendo cargadas. Calcule la potencia disipada en cada resistor y realice el balance energético.

b) Determine la diferencia de potencial $V_A - V_B$.

c) Se coloca entre los terminales A y B un capacitor de 2,2μF. Determine la cantidad de carga en el mismo y su polaridad. ¿Se modifican los valores de corriente calculados para el inciso a)?

3.13 a) Para el circuito del inciso c) del ejercicio anterior, se reemplaza la resistencia de 22Ω por un capacitor de 4,7μF (fig.3.49). ¿Se modificarán las respuestas dadas en el ejercicio anterior? Explique.

b) Calcule la carga en cada capacitor y su polaridad.

3.10) La corriente de cortocircuito está limitada únicamente por la resistencia interna de la fuente. Recuerde que a circuito abierto no existe circulación de corriente.

3.11) Exprese las corrientes en mA y trabaje con dos decimales.

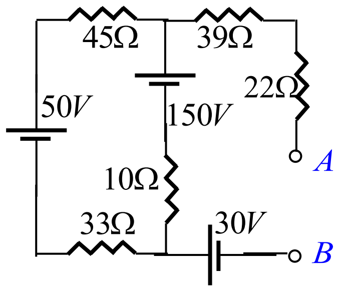


Fig.3.48

3.12) Recuerde que para mantener la circulación de una corriente continua constante debe existir un circuito cerrado. Agregando capacitores a un circuito, los mismos se cargan hasta llegar al nuevo estado estacionario cuando la tensión deja de modificarse.

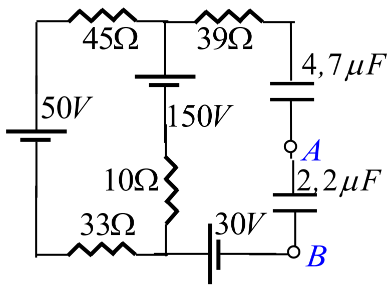


Fig.3.49

3.13) Observe que los capacitores no tienen otros componentes en paralelo que fijen la tensión entre sus placas.

3.14 a) Se agrega una fuente de 50V y un capacitor de 0,47µF como se indica en fig.3.50. ¿Se modificarán las respuestas dadas en el ejercicio anterior? Explique.

b) Calcule la carga en cada capacitor y su polaridad.

3.15 Para el circuito de fig.3.51, calcule la carga del capacitor indicando su polaridad.

3.16 La diferencia de potencial entre bornes de una de una fuente tensión a circuito abierto es de 1,51V y 0,05Ω su resistencia interna. Mediante un alambre de cobre de 0,5mm2 de sección trasversal y 17nΩ.m de resistividad se conecta a los extremos de la fuente una resistencia de 1,23Ω. Considerando que la distancia entre la fuente y la resistencia de carga es de 5m, determine cuál será la indicación de un voltímetro con alcance 2V e indicación digital de 3½ dígitos si se lo conecta en:

a) Extremos de la resistencia de carga.

b) En bornes de la fuente.

3.17 En el circuito de fig.3.52 se utilizan resistencias de ¼W,

$R_1 = 47\Omega, R_2 = 470\Omega, R_3 = 100\Omega,\ R_4 = 1K\Omega.$

$R_V = 10M\Omega$

Determine para cada resistencia la corriente que haría disipar el 20% de la potencia máxima permitida. Exprese el resultado en mA. *Exprese la corriente en mA con un decimal.*

3.18a) Para el circuito de fig.3.52 determine la corriente por cada resistencia considerando que por R1 circulan 30 mA.

b) Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio anterior.

c) Determine la corriente máxima por R_1 para que las resistencias disipen a lo sumo el valor correspondiente al ejercicio 3.17.

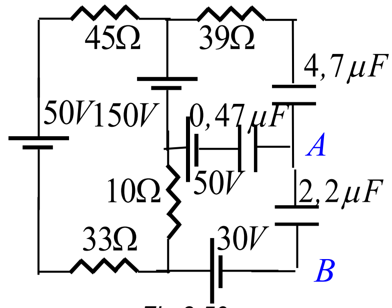


Fig.3.50

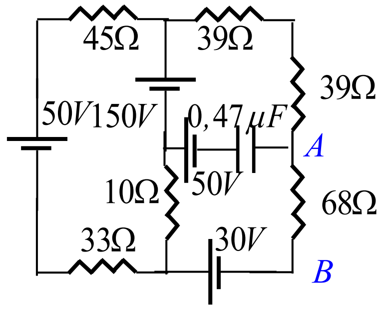


Fig.3.51

3.16) En los instrumentos con indicación digital, cada dígito completo comprende los números de 0 a 9. Se denomina medio dígito a la representación digital que suele utilizarse para el dígito más significativo cuando el alcance del instrumento es múltiplo de dos pudiendo ser su valor 0 o 1. Para más información vea el comentario del ejercicio 3.21.

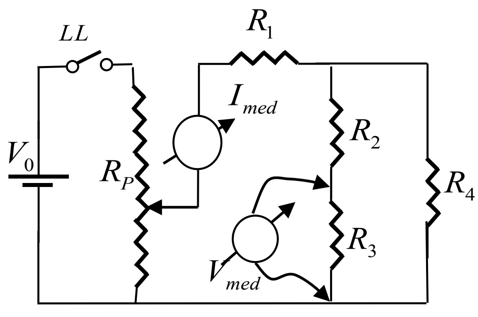


Fig.3.52

3.19 Para implementar la experiencia de fig.3.52 se dispone de fuentes de tensión de 3V 1A, 5V 0,5A, 10V 0,05A, 12V 0,3A, 15V 0,03A y potenciómetros de 3Ω 10W; 100Ω 0,5W, 300Ω 1W, 1kΩ 0,5W y 1kΩ 0,125W .

a) Determine la tensión que debe entregar el divisor al circuito para que por la resistencia R_1=47Ω circule 15mA y utilícelo para preseleccionar las fuentes de acuerdo a su tensión.

b) Utilizando los valores preseleccionados determine los posibles potenciómetros a utilizar.

c) Para la medida de corriente se dispone de un amperímetro con indicación analógica y alcances 1, 3, 10, 30, 100 y 300mA mientras que para medir las tensiones en los componentes se dispone de un voltímetro de 3½ dígitos y alcances 200mV, 2V, 20V y 200V. ¿Qué alcances serán los más convenientes para las condiciones de trabajo a adoptar para esta práctica?

d) Realice un listado especificando los componentes a utilizar para la realización de la práctica.

3.20) La aguja de un amperímetro desvía 71 divisiones con una indeterminación de ±0,2div. Considerando un instrumento clase 1 con 30mA de alcance y escala lineal con 120 divisiones, determine la corriente por el instrumento indicando el intervalo de posibles valores para la magnitud real.

3.21) La indicación de un multímetro de 3½ dígitos, alcance 20V es 3,92 cuando se mide la caída de potencial sobre una resistencia y 0,219 cuando se mide la resistencia en la escala de 2KΩ. De acuerdo a las especificaciones del instrumento, el error cometido en la medida de resistencia es $\Delta R = \pm(0,8\% R_{med} + 1\ \Omega)$ y para la tensión $\Delta V = \pm(0,5\% R_{med} + 1\ 0mV)$.

Determine la corriente a través de la resistencia indicando el intervalo de posibles valores para la magnitud real.

3.19a) Calcule la resistencia equivalente que ofrece el circuito a la fuente.

b) Para realizar una primera preselección del potenciómetro, calcule la corriente por el mismo cuando se lo conecta a cada una de las fuentes seleccionadas en b) y agréguele los 15mA que debe entregar al circuito. Utilice este valor de la corriente para estimar la potencia disipada por el potenciómetro.

Para realizar comparaciones entre valores diferentes de una misma magnitud o entre magnitudes físicas diferentes, se define el error relativo

$$\frac{\Delta X}{X_{med}} = \pm\left(\frac{X_{med} - X_{real}}{X_{med}}\right)$$

Generalmente se expresa en forma porcentual, denominándose a este valor error relativo porcentual.

$$e_r\% = \pm\left(\frac{X_{med} - X_{real}}{X_{med}}\right)100\%$$

En los instrumentos con indicación analógica, para estimar los errores instrumentales, el fabricante especifica el índice de clase o clase del instrumento que es el error relativo máximo cometido a fondo de escala.

$$c\% = \pm\left(\frac{\Delta X_{máx}}{Alcance}\right)100\%$$

Conocida la clase, se calcula ΔXmáx y el error relativo máximo del valor medido.

$$\Delta X_{máx} = \pm\frac{Alcance}{100\%}c\%$$

3.20) Considere que el error cometido es la suma del error instrumental y el de indicación.

3.22 a) Se desea construir un amperímetro con alcance 1,5 3 15 y 30 mA utilizando un galvanómetro clase 0,5 alcance 50μA y resistencias dispuestas apropiadamente. Realice un esquema del circuito a utilizar.

b) Si la caída de potencial introducida por el galvanómetro cuando la aguja desvía a plena escala es 100 mV, calcule las resistencias necesarias para obtener los alcances requeridos. Suponga que las resistencias se construyeron con alambre resistivo (fig.3.35) lográndose el valor entero más próximo al calculado.

Determine el error porcentual cometido respecto al valor resultante del cálculo. Exprese el resultado en ohmios con dos decimales indicando el error de construcción calculado.

c) Calcule el error absoluto máximo para cada escala del amperímetro construido.

d) Calcule la resistencia del amperímetro para cada una de las escalas. Exprese el resultado en Ω con dos decimales.

3.23) Repita el ejercicio anterior para el caso en que se desee construir un voltímetro de alcance 1, 2, 10 y 20V. Suponga que dispone de resistencias comerciales con tolerancia $\pm 1\%$ y valores de 1 1,2 1,5 1,8 2,2 2,7 3,3 3,9 4,7 5,1 5,6 6,8 8,2 multiplicados por 1 10 10^2 10^3 10^4 10^5 y 10^6.

3.24 En las figs.3.53a y b, las resistencias R_1 y R_2 representan las resistencias de pérdida de los capacitores y R_V la del voltímetro. Este circuito equivalente considera cada capacitor como si fuera ideal en paralelo con una resistencia que representa las corrientes de fuga por el capacitor. Determine la tensión en placas de C_2 en estado estacionario de para cada una de las situaciones presentadas. Considere:

V_b=12V, R_1=90MΩ, R_2=63MΩ, R_V=10MΩ.

Alcance	*Lectura*
200 V	*02.7*
20 V	*2.78*
2 V	***1---***

Tabla 3.1

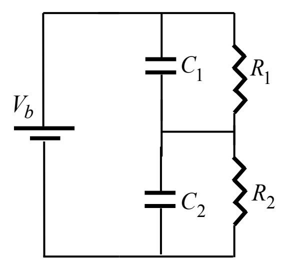
Otra manera de presentar el resultado de la medición es mediante dígitos decimales, pudiéndose elegir una entre varias escalas o alcances, por ejemplo 200mV, 2-20-200 y 1000 V.

En Tabla 3.1 se muestran los valores indicados para una misma magnitud medida con diferentes alcances.

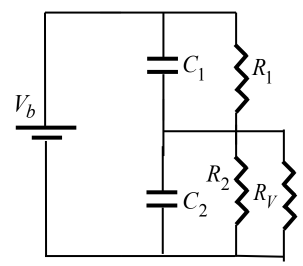
Considerando solamente el error con que se indican los dígitos decimales, por ejemplo +/- 1 dígito, si se utiliza la escala de 20 V la magnitud medida estará comprendida entre 2,77 y 2,79 V, mientras que para la escala de 200V estará entre 2,6 y 2,8V.

En estas condiciones, el error porcentual cometido en el primer caso es de +/- 0,4% mientras que si se utiliza la escala de 200 V será de +/-4%.

La indicación correspondiente a la escala de 2V, expresa que en este caso la magnitud medida sobrepasa el alcance del instrumento.



(a)



(b)

Fig.3.53

3.25 Demuestre que la resistencia de fuga del capacitor (fig.3.54), en función de la indicación del voltímetro en estado estacionario, responde a la expresión

$$R_{fuga}=\left(\frac{V_b}{V_{medido}}-1\right)R_V$$

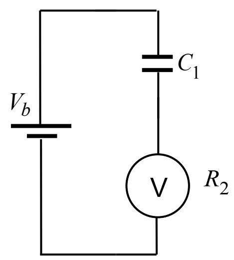


Fig.3.54

3.26 Un alumno emprendedor desea controlar la temperatura del agua para el mate. Le contaron que debe ser próxima a 78ºC pero posee un termómetro de mercurio con escala entre 20 y 50 ºC. Por este motivo, decide construir su propio medidor de temperatura. Para ello construye un puente como el esquematizado en fig.3.55 utilizando resistencias iguales de 1KΩ (medidas a 22ºC), alimentadas mediante una batería de 9V.

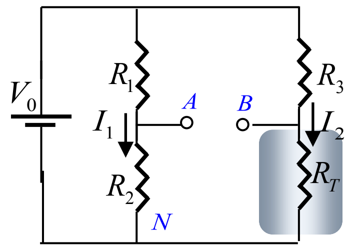


Fig.3.55

A una de ellas le suelda dos cables delgados y la coloca en el interior de un tubo de vidrio cuyos extremos sella para que no se introduzca agua. De igual forma, mediante una cubierta aislante, protege a los cables de conexionado para que no entren en contacto con el agua.

Como no conoce el coeficiente térmico de resistividad del material con que está construida R4, decide determinarlo de manera aproximada suponiendo que la variación es lineal entre 0ºC y 100ºC. Para ello, introduce en hielo triturado el sensor fabricado y determina la d.d.p Va-Vb, resultando igual a +207 mV. A continuación repite la operación introduciendo el dispositivo en agua caliente cuando esta comienza a hervir, obteniendo -607 mV.

Determine el coeficiente térmico de resistividad del sensor construido.

¿Cuál será el valor de Va-Vb cuando la temperatura del agua alcance 78ºC?

3.27 No conforme con los valores obtenidos, el alumno considera la posibilidad de utilizar un micro-amperímetro con alcance ±100μA y 1000Ω de resistencia interna conectado entre los puntos a y b.

3.27 Como la corriente por R1, R2 antes de conectar el instrumento es varias veces superior al alcance del instrumento, en primera aproximación se puede suponer que no existe resistencia entre A y B con la condición que la diferencia de potencial en los puntos extremos sea la correspondiente al alcance del instrumento y su resistencia interna. De esta manera se podrá determinar de manera aproximada el intervalo de medida de temperatura.

Tenga en cuenta que se trata de un instrumento con el cero en el centro de la escala y por lo tanto tendrá que considerar que la corriente puede circular en ambos sentidos.

Determine el intervalo de temperaturas que podrá medir con esta disposición.

Sugerencia: Sin llegar a resolver el sistema de seis ecuaciones resultante, puede seguir las indicaciones en la columna derecha. De esta manera tendrá una solución aproximada. Podrá verificar que la aproximación utilizada es válida resolviendo el circuito de fig.3.55b para ambos valores del alcance del instrumento.

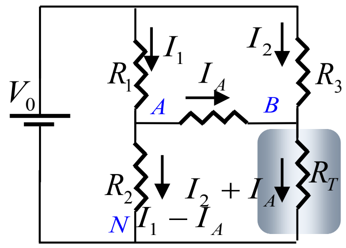


Fig.3.55b

3.28 Otro alumno, al ver la inquietud de su compañero decide imitarlo. Como el profesor realizó una experiencia en clase utilizando un generador de Van der Graaf y no supo decir a que potencial se encontraba el mismo, decidió ayudarlo buscando una forma de determinarlo. Para ello propuso un divisor resistivo, formado por diez resistencias de $10M\Omega$ cada una, como el mostrado en fig.3.56 y un voltímetro de 1KV de alcance, esperando medir al menos hasta 10 KV.

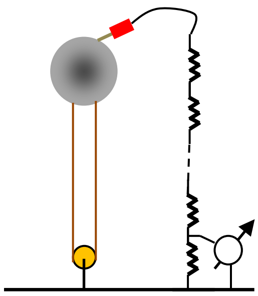


Fig.3.56

a) Suponiendo que la esfera se encuentra a 10KV respecto de tierra, calcule la corriente a través del divisor.

b) La expresión del potencial sobre la superficie de la esfera de radio R es:

$$V(R) = \frac{KQ}{R}$$

Siendo K la constante de Coulomb

Determine la carga de la esfera cuando su potencial es 10 KV y considerando que se descarga sobre el divisor con corriente constante, estime el tiempo que tardará en descargarse al conectar el divisor. Considere R=10cm.

3.29 Frente al fracaso de su propuesta, el alumno no se da por vencido y decide reemplazar las resistencias por diez capacitores en serie de 60 pF cada uno y cuya tensión de ruptura es de 2 KV. De esta manera, podría medir hasta 20 kV en la esfera.

Antes de armar su dispositivo de medida, decide hacer una prueba midiendo la tensión de una pila de 9 V con un divisor capacitivo formado por dos capacitores en serie de los que piensa construir su aparato para medir alta tensión continua. Utiliza además un voltímetro de 10 MΩ de resistencia interna y alcance adecuado (fig. 3.57a).

Debido a que utiliza capacitores del mismo valor, espera medir una tensión del orden de 4,5 V.

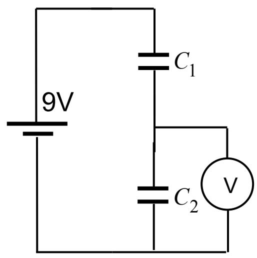
Arma el circuito y al realizar la determinación observa que la indicación del instrumento disminuye continuamente estabilizándose después de cierto tiempo en 0,693V.

Ante este resultado decide conectar el voltímetro sobre el otro capacitor (fig.3.57b) y repetir la medición, que se estabiliza en 0,833V.

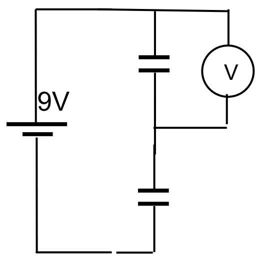
Luego de discutir con sus compañeros y consultar, llegó a la conclusión que los resultados obtenidos no concuerdan con el esperado debido a las resistencias de fuga en los capacitores.

Considere dos resistencias R_{f1} y R_{f2} en paralelo con cada capacitor y teniendo en cuenta la resistencia del voltímetro y los valores medidos en cada caso, determine el valor aproximado de las respectivas resistencias de fuga.

¿Podrá utilizar su propuesta para medir el potencial de la esfera?



(a)



(b)

Fig.3.57

CAPITULO 4
CAMPO MAGNÉTICO

De manera similar a cómo sucedió con las fuerzas eléctricas, existe constancia de que en la Grecia Antigua se utilizaban piedras traídas desde Magnesia, que ejercen atracción sobre el hierro. Debido a la procedencia de las mismas, el mineral de hierro que las constituye recibió el nombre de magnetita. Las barras y agujas magnéticas construidas fueron conocidas con el nombre de imanes, denominándose magnéticas a las fuerzas ejercidas por los mismos sobre objetos de hierro.

En China, alrededor del año 1000 de nuestra era, utilizaban las agujas magnéticas para orientarse en la navegación. La llegada de la brújula a Europa, además de contribuir en la navegación, abrió un nuevo campo de estudio que permitió determinar las fuerzas entre barras magnetizadas utilizando expresiones similares a las correspondientes a fuerzas entre cargas eléctricas. Por este motivo, durante muchos años se consideró que el origen del campo magnético residía en cargas asociadas a los polos magnéticos. La imposibilidad de aislar los polos magnéticos hizo abandonar esta teoría.

La Tierra se comporta como un imán recto cuyo polo norte apunta al norte geográfico.

En 1820, el físico danés Christian Oersted comprobó experimentalmente que las corrientes eléctricas originan campos magnéticos. El físico y matemático francés André Marie Ampere pudo comprobar que las fuerzas magnéticas son fuerzas entre cargas eléctricas en movimiento, encontrando la expresión matemática que relaciona la fuerza entre conductores con la corriente que circula por ellos.

La mención del término campo magnético tiene asociada la idea de la orientación de la aguja de una brújula o de la fuerza con que un imán atrae objetos de hierro, sin especificarse realmente qué es ni cómo se origina.

De igual forma a como se procedió con el campo eléctrico, en estos capítulos iniciales se trata de manera conceptual el resultado de algunas experiencias, dejando el tratamiento más detallado para la segunda parte.

Colgando una aguja magnetizada de un hilo y estando alejada de cualquier objeto metálico, se observan oscilaciones de la misma que se amortiguan hasta que se detiene apuntando en dirección sur a norte terrestre.

Este resultado puede explicarse considerando que la Tierra se comporta como un imán.

Se denomina polo a cada extremo de la aguja magnetizada, norte al que está dirigido hacia el norte geográfico y al otro, sur (fig.4.1a).

Acercando un imán, la posición de la aguja se modificará por el efecto simultáneo del imán y del magnetismo de la Tierra (fig.4.1b).

De manera similar al campo eléctrico originado por una barra cargada eléctricamente, la modificación de las propiedades del espacio por la presencia de un imán, se representa mediante un vector denominado densidad de flujo magnético $\vec{B}$ (fig.4.1c).

Para la descripción cualitativa pretendida, se puede considerar que la magnitud del campo magnético en cada punto tiene en cuenta el aporte del imán al par de giro ejercido sobre una aguja magnetizada colocada en dicho punto, su dirección es la correspondiente a la posición de equilibrio que adoptaría la misma y su sentido es desde el polo magnético sur hacia el polo magnético norte de la aguja.

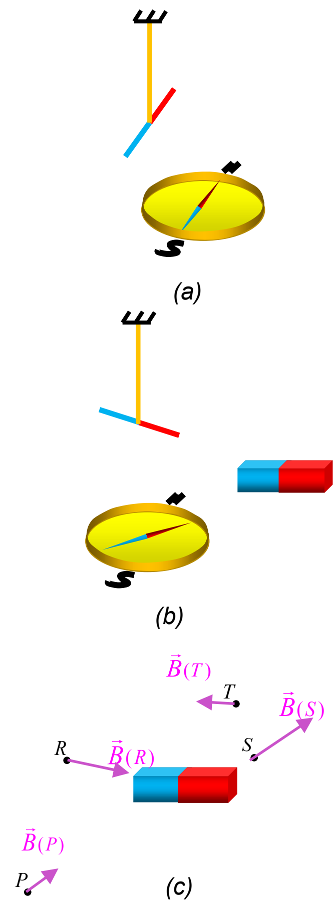


Fig.4.1

Fuerza sobre un conductor con corriente

De la misma manera que un imán ejerce una fuerza sobre otro imán, también se puede comprobar que ejerce una fuerza sobre un alambre con corriente.

Considere un largo conductor con un doblez en forma de U sostenido por dos soportes aislantes y conectado a una batería por medio de un interruptor (fig. 4.2a).

Acercando un imán, al cerrar el circuito eléctrico accionando el pulsador P, se observa un giro del doblez en U indicando la existencia de una fuerza que, para las condiciones mostradas en la fig.4.2, es hacia el lector. Invirtiendo la posición del imán o el sentido de circulación de la corriente, la fuerza también se invierte.

Experimentalmente se puede comprobar que la fuerza entre el alambre y el imán presenta las siguientes características:

_Su magnitud depende de la corriente, del imán y de la posición relativa entre el imán y el alambre con corriente.

_Su dirección en cada punto es, normal al plano formado por el tramo de alambre considerado y la dirección particular

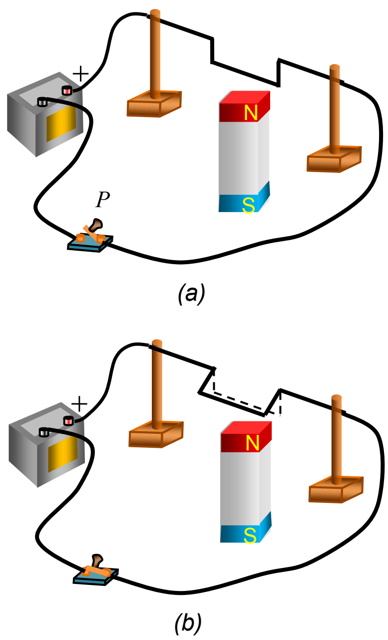


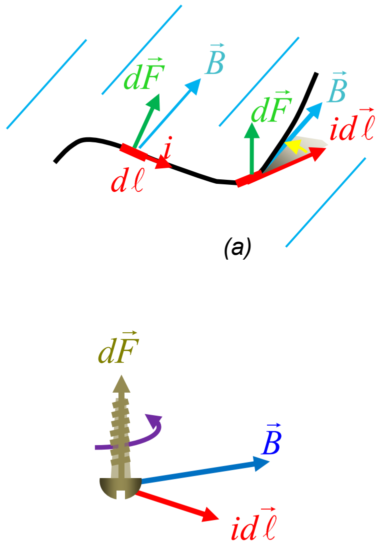
Fig.4.2

en el espacio correspondiente al campo magnético generado por el imán.

_Su sentido es el de avance de un tornillo que gira, desde la dirección de la corriente en el tramo de alambre considerado hacia donde apunta el campo magnético.

Estas observaciones se pueden resumir en el esquema de fig. 4.3a, donde se muestra un alambre de forma arbitraria por el que circula una corriente eléctrica, colocado en una región en la que existe un campo magnético.

La región sombreada indica el plano formado por el vector $id\vec{\ell}$ representativo del tramo de alambre con corriente, y el vector que representa al campo magnético $\vec{B}$. El elemento de fuerza $d\vec{F}$ es perpendicular a este plano y su sentido es el de avance de un tornillo que gira de $id\vec{\ell}$ hacia $\vec{B}$ (fig.4.3b).



(a)

(b)

Fig.4.3

Así como el campo gravitatorio comprende el conjunto de valores que adquiere la aceleración gravitatoria y que multiplicado por la masa de un objeto permite determinar el peso del mismo, el campo magnético es un campo vectorial relacionado con la fuerza debida a efectos magnéticos que en cada punto se ejerce sobre otro imán o sobre un conductor con corriente eléctrica.

El campo magnético no realiza trabajo sobre los portadores de carga que constituyen la corriente eléctrica porque la fuerza ejercida sobre los mismos es perpendicular a la dirección de su movimiento.

La expresión que permite calcular la fuerza sobre cada elemento de longitud $d\ell$ del conductor con corriente, resume las observaciones experimentales:

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell}x\vec{B} \qquad \text{ecs.4.1}$$

Representación del campo magnético

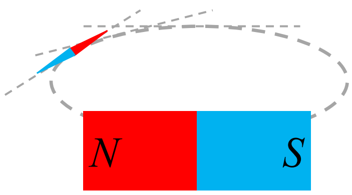


Fig.4.4

Esparciendo limaduras de hierro sobre una hoja de papel y colocando debajo de ella un imán recto se observará al golpear suavemente la hoja, que las limaduras se orientan siguiendo líneas, más separadas entre sí en la parte media del imán que en los polos donde el campo posee mayor intensidad.

Esta observación experimental condujo a la representación de un campo magnético utilizando líneas, obtenidas colocando una brújula en la región de campo a representar.

Alcanzada la posición de equilibrio de la aguja, se traza por el punto donde está ubicada, una recta paralela a su indicación (fig.4.4). A continuación se desplaza levemente la brújula en dirección de la línea trazada volviéndose a trazar otra línea paralela a la nueva indicación. La envolvente del conjunto de líneas trazadas constituye una línea de campo magnético. Cada línea, por fuera del imán, está dirigida desde el polo norte al sur del mismo. En cada punto, la intensidad del campo es tenida en cuenta por la cantidad de líneas por unidad de superficie representadas en su entorno.

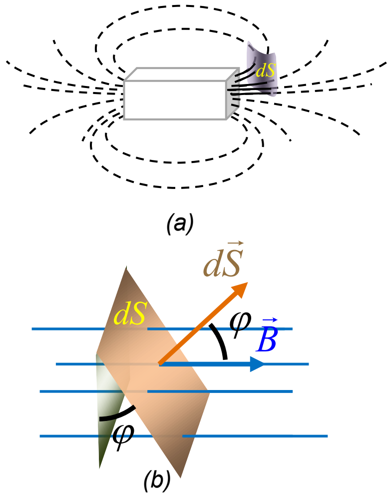


Fig.4.5

Flujo magnético

El campo magnético en cada punto del espacio se representa mediante un vector $\vec{B}$ cuya intensidad es proporcional a la cantidad de líneas del campo por unidad de superficie mientras que su dirección y sentido es el de la línea de campo correspondiente a ese punto. En Fig.4.5a se muestra una superficie elemental dS en la región de campo magnético de un imán. El elemento de superficie puede representarse por un vector perpendicular a la misma, cuya magnitud es igual al área del elemento.

La cantidad de líneas a través de cada elemento de superficie es igual a la cantidad de líneas que atraviesa la proyección del elemento de superficie sobre un plano perpendicular a la dirección del campo (fig.4.5b) y puede expresarse de la siguiente forma:

$$N^{o}\ de\ lineas\ a\ traves\ de\ dS = BdS\cos\phi = \vec{B}d\vec{S}$$

El número de líneas a través de una superficie cualquiera S, se obtiene sumando la contribución debida a cada elemento de la misma. Esta suma, cuyo resultado es un escalar, es la integral sobre toda la superficie.

$$\phi_B = \iint_S \vec{B}d\vec{S} \qquad \textit{ecs.4.2}$$

Esta expresión representa el flujo de un campo magnético a través de la superficie S y es una medida de la cantidad de líneas de campo a través de la misma.

En el SI, el Weber (Wb) es la unidad de medida de flujo magnético. Se denomina Tesla (T), a la unidad de medida del campo magnético o densidad de flujo magnético B.

$$[T] = [Wb / m^2]$$

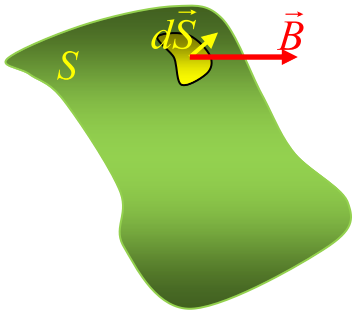


Fig.4.6

La cantidad de líneas por unidad de superficie de una representación del campo magnético es proporcional a la densidad de flujo B en la región representada.

El valor del campo magnético sobre la superficie de la Tierra varía de un lugar a otro con valores cercanos a 30 μT en el ecuador y 60 μT en los polos, siendo su dirección prácticamente horizontal en el ecuador y vertical en los polos.

El origen de los campos magnéticos.

Colocando una brújula cerca de un alambre con corriente, se puede comprobar experimentalmente que corrientes eléctricas producen campos magnéticos.

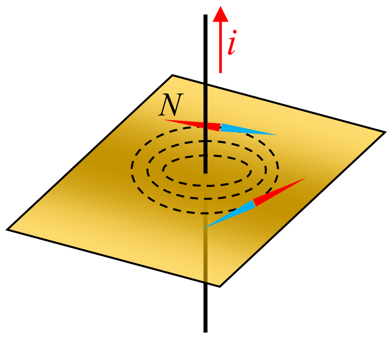


Fig.4.7

En fig.4.7 se indica con la letra N al polo norte de la aguja colocada cerca de un alambre por el que circula una corriente eléctrica, observándose que su orientación depende del punto donde se la ubique. Atravesando un papel con dicho alambre, al esparcir limaduras de hierro estas se orientan formando circunferencias centradas en el mismo.

Las corrientes eléctricas producen campos magnéticos y los mismos se distribuyen rodeando a la corriente que les dio origen.

La regla de la mano derecha se utiliza para determinar el sentido del campo magnético (fig.4.8). Tomando el conductor con la mano derecha y con el pulgar en sentido de circulación de la corriente, los dedos restantes indicarán el sentido del campo magnético generado por esa corriente.

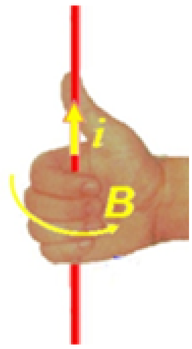


Fig.4.8

El campo magnético generado por un largo alambre con corriente es en cada punto tangente a una circunferencia ubicada en el plano normal al conductor y centrada en éste (fig.4.9). El sentido del campo magnético se determina mediante la regla de la mano derecha. De la misma manera que un imán, una corriente eléctrica modifica las propiedades del espacio generando un campo magnético.

Conductores con corriente e imanes generan campos magnéticos y cuando se coloca un conductor con corriente o un imán en una región de campo magnético, aparecen fuerzas sobre el conductor o el imán.

Ley de Ampere

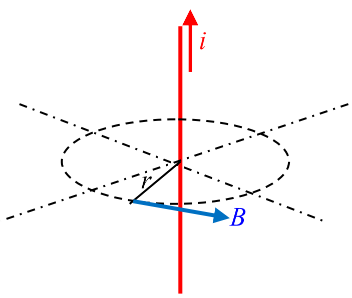


Fig.4.9

Acercando un imán a una brújula, la aguja cambiará su orientación comenzando a oscilar alrededor de la posición de equilibrio, resultante entre la contribución del campo magnético del imán y el terrestre. El periodo de estas oscilaciones depende de la intensidad del campo magnético, siendo más rápidas cuanto más próximos están entre sí el imán y la aguja.

Reemplazando al imán por un largo alambre con corriente y midiendo el periodo de las oscilaciones de una aguja, Ampere en 1831 pudo determinar la dependencia del campo magnético con la corriente que lo origina y con la posición. El resultado experimental obtenido permitió comprobar que la intensidad del campo magnético producido en un punto por un largo alambre con corriente es directamente proporcional a la corriente e inversamente proporcional a la distancia entre el conductor y la aguja.

$$B \propto \frac{i}{r} \qquad \textit{ecs.4.3}$$

A partir de este resultado experimental, se obtiene la expresión integral conocida como "Ley de Ampere".

$$\oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 i \qquad \textit{ecs.4.4}$$

La constante de proporcionalidad se denomina permeabilidad magnética y su valor depende del medio material en que se encuentra el campo magnético. Se la representa mediante la letra griega μ y se agrega el subíndice 0 cuando se refiere al vacío. Para el aire, tiene un valor muy aproximadamente igual al del vacío, que en el SI es

$$\mu_0 = 4\pi x 10^{-7} \quad \left(\frac{Wb}{Am}\right)$$

El primer miembro de la ecs.4.4 es la circulación del campo que en este caso es proporcional a la corriente encerrada por la curva C independientemente de la forma de la misma.

En el campo electrostático, el trabajo realizado para recorrer un camino cerrado es nulo. Igualmente la circulación del campo electrostático, que en este caso es el trabajo por unidad de carga, es nula aún cuando la curva elegida encierre alguna carga eléctrica.

En el caso del campo magnético generado por una corriente eléctrica la circulación será diferente de cero cuando la curva elegida encierre a algún conductor con corriente. En fig.4.11, la circulación del campo magnético a lo largo de C2 es diferente de cero, anulándose para la curva C1. Por este motivo, para el campo magnético no se puede definir una función potencial escalar como se hizo en electrostática.

La ley de Ampere expresa que las corrientes eléctricas originan campos magnéticos a su alrededor.

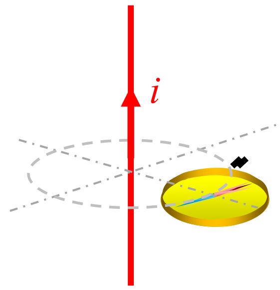
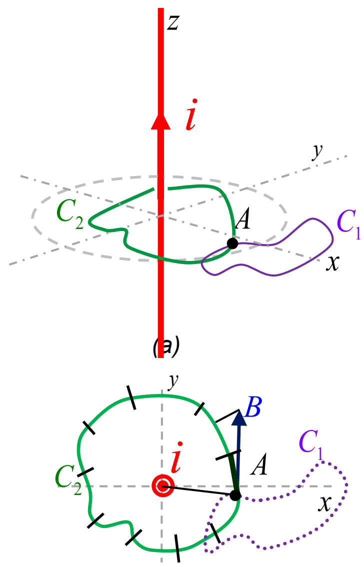


Fig.4.10

La ley de Ampere es válida para campos magnéticos generados por cualquier distribución de corrientes. Independientemente del camino recorrido al calcular la circulación, el resultado es proporcional a la corriente encerrada por la trayectoria.



(b)

Fig.4.11

Para cada tramo elemental de la curva se evalúa el producto entre la proyección del vector sobre el tramo y la longitud de este. La suma del resultado para todos los tramos en que se dividió la curva cerrada es la integral de ecs.4.4 y se denomina circulación del campo vectorial.

Campo magnético generado por un alambre largo con corriente

La observación experimental resumida en fig.4.9 junto con la ley de Ampere, permiten conocer la expresión del campo magnético en un punto cualquiera del espacio, originado por una corriente en un alambre recto muy largo.

En fig.4.11b se muestra al conductor de fig.4.11a visto desde arriba, resumiéndose el eje z y el alambre a un punto indicado con un círculo rojo. La corriente, indicada con una flecha en fig. 4.11a se representa mediante un punto en fig.4.11b, correspondiente a la punta de la flecha. Si hubiese tenido sentido contrario se observaría la cola de la flecha que se indica con una x.

La circulación de corriente por el alambre origina un campo magnético en la región cuya intensidad, por tratarse del campo producido por un conductor recto muy largo, responde a la expresión 4.3. Por este motivo, la magnitud del campo es la misma para los puntos P_1 y P_2 (fig.4.12a), ambos a la misma distancia del alambre, indicada con R. El campo está en sentido en contra de las agujas del reloj, determinado mediante la regla de la mano derecha y su dirección es en cada punto normal a la recta formada por el punto y el conductor. Por este motivo, eligiendo como camino de integración para la ecs.4.4 una circunferencia centrada en el alambre, el campo magnético en cada punto resulta tangente a la curva y con igual magnitud.

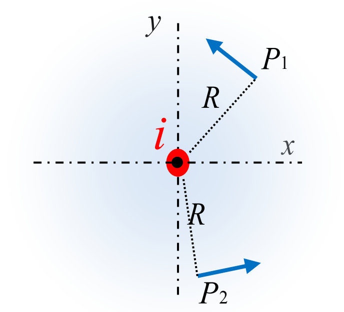
En ecs.4.4, para cada punto de la curva se calcula el producto escalar entre el vector campo y el tramo de la curva en el sentido elegido para recorrerla, que coincide con la proyección del vector sobre el arco de circunferencia.

Recorriendo la curva en el sentido determinado por la regla de la mano derecha, para cada punto de esta curva particular el producto escalar es directamente el producto entre ambos.

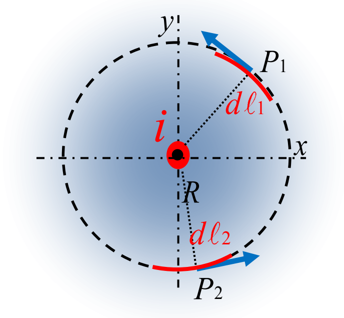
$$\vec{B}d\vec{\ell} = Bd\ell$$

La comprobación experimental de la dependencia del campo magnético con la distancia al largo conductor asegura que, cuando la curva de integración es una circunferencia, la intensidad del campo magnético tiene el mismo valor para todos los puntos de la misma.

Para configuraciones de corriente con determinada simetría, como es el caso del alambre recto infinito, es posible utilizando la ecs.4.4, obtener la expresión del campo magnético en función de la corriente y de la posición para la que se realiza el cálculo.



(a)



(b)

Fig.4.12

Por este motivo, el valor del producto escalar entre el campo y el elemento de circunferencia es el mismo para cualquier elemento de curva. Al realizar la integral a lo largo de la curva se suman todas estas contribuciones, resultando para esta situación particular.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = B(R) 2\pi R$$

La ley de Ampere establece que en cualquier caso, la circulación del campo magnético es igual a la permeabilidad del medio multiplicada por la corriente encerrada por la curva. Aplicándola al caso en cuestión, se obtiene:

$$B(r) 2\pi R = \mu_0 i$$

De esta manera, el valor del campo magnético a una distancia R del largo conductor con corriente resulta ser:

$$B(R) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \qquad \textit{ecs.4.5}$$

La dirección y sentido el vector campo magnético se determinan mediante la regla de la mano derecha.

Fuerza entre conductores con corriente

Debido a que una corriente genera un campo magnético y que al colocar una corriente en un campo magnético se pone de manifiesto una fuerza magnética, es fácil concluir que si se tienen dos conductores por los que circulan corrientes eléctricas, existirán fuerzas magnéticas entre ellos. En fig.4.13a se muestran dos largos conductores paralelos separados una distancia d, identificados con los números 1 y 2, por los que circulan las corrientes I_1 e I_2. El sentido del campo magnético que sobre el conductor 2 genera la corriente a través de 1, B_{21}, se obtiene aplicando la regla de la mano derecha (fig.4.13b). Sobre cada tramo del conductor 2 por el que circula I_2 debido a la interacción con el campo magnético, se origina una fuerza elemental dF_{21} (ecs.4.1).

$$d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{\ell}_2 x \vec{B}_{21} = I_2 d\ell_2 B_{21} sen(90°) \ \ (-\breve{j})$$

$$d\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} I_2 dz \quad (\breve{j})$$

En la que se reemplaza $d\ell$ por dz por estar el alambre en esta dirección.

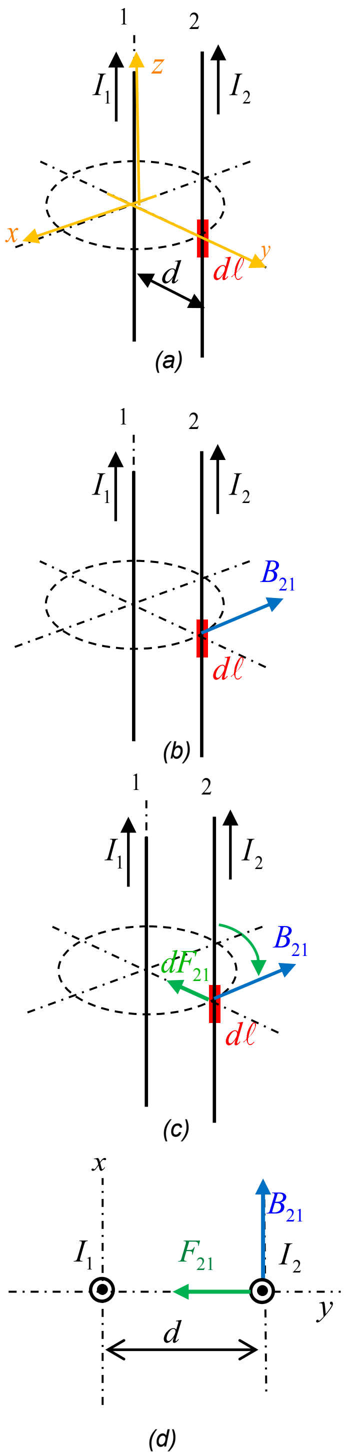


Fig.4.13

El sentido de la fuerza es el de avance de un tornillo que gira en el sentido de $I_2 d\ell$ hasta superponerse con B_{21} que en este caso, como se muestra en fig.4.13c, origina atracción entre los alambres indicada mediante el versor $-\breve{j}$ en la expresión anterior. Al mismo resultado se llega evaluando el producto vectorial.

$$I_2 d\vec{\ell} = I_2 dz \quad (\breve{k})$$

$$\vec{B}_{21} = B_{21} \; (-\breve{i})$$

$$I_2 d\vec{\ell} x \vec{B}_{21} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & I_2 dz \\ -B_{21} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -I_2 B_{21} dz \quad (\breve{j})$$

De igual forma se puede comprobar que la fuerza es de repulsión invirtiendo la corriente en uno cualquiera de los alambres.

La fuerza sobre el alambre será la debida a la contribución de los infinitos tramos elementales que lo componen, por este motivo en este caso conviene expresar la fuerza por unidad de longitud del hilo.

$$\left|\frac{F}{\ell}\right| = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Cada una de estas corrientes genera un campo magnético. Se deja para el lector comprobar que la fuerza generada sobre cada tramo del conductor 1 es igual y opuesta a la encontrada para el conductor 2, resultando:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

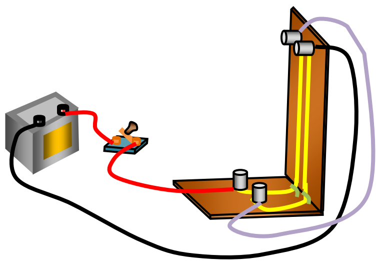
De esta manera, cuando se trata de alambres largos paralelos con corriente, la fuerza por unidad de longitud es proporcional al producto de las corrientes e inversamente proporcional a la distancia entre los alambres.

$$\left|\frac{F}{\ell}\right| \propto \frac{I_1 I_2}{d}$$

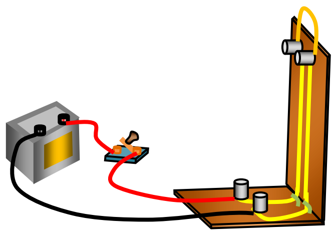
En Fig.4.13d se muestra el plano que contiene a los conductores indicándose con un círculo a la corriente saliente del dibujo. Si la corriente es la misma, la fuerza por unidad de longitud resulta:

$$\left|\frac{F}{\ell}\right| = 0,2\frac{I^2}{d} \quad \left(\frac{\mu N}{m}\right) \qquad \textit{ecs.4.6}$$

Cuando por dos alambres paralelos circulan corrientes en el mismo sentido, la fuerza entre ellos es de atracción, mientras que para corrientes con sentidos opuestos, es de repulsión.



(a)



(b)

Fig.4.14

Se puede comprobar que la fuerza entre alambres paralelos con corrientes en el mismo sentido es de atracción, utilizando una disposición como la mostrada en fig.4.14a. Invirtiendo la corriente en uno de ellos la fuerza será de repulsión (fig.4.14b).

De ecs.4.6 se desprende que la corriente por los alambres debe ser de elevada intensidad para poder apreciar variaciones en su separación.

Unidad fundamental de medidas electromagnéticas

En el Sistema Internacional de Unidades (S.I.) la unidad fundamental para las magnitudes electromagnéticas es el amperio.

Cuando circula una corriente de un amperio a través de un circuito formado por conductores paralelos rectilíneos de longitud infinita y sección transversal despreciable separados una distancia de un metro, la fuerza entre dichos conductores es de dos diezmillonésimas de newton por cada metro de conductor. Esta definición corresponde a la expresión 4.6.

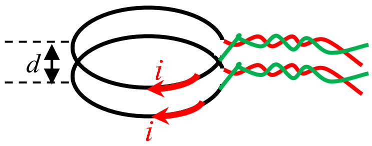


Fig.4.15

La imposibilidad práctica de utilizar dos conductores infinitamente largos se soluciona utilizando dos espiras idénticas paralelas muy próximas entre sí, una fijada rígidamente y la otra formando parte de una balanza utilizada para medir la fuerza entre ellas (fig.4.15).

Este sistema presenta el mismo comportamiento que los conductores infinitamente largos y se utiliza para determinar la relación entre el patrón de medidas electromagnéticas con los demás patrones de medida.

Una sección transversal cualquiera de un circuito es atravesada por una cantidad de carga eléctrica igual un culombio cuando por el mismo se mantiene una corriente de un amperio durante un segundo.

A partir de la unidad de corriente eléctrica, puede determinarse la unidad de carga eléctrica, utilizando la expresión que las relaciona, resultante de integrar ambos miembros de ecs.3.1:

$$q(t) = \int i(t)dt \qquad \text{ecs.4.7}$$

Espira con corriente en un campo magnético uniforme

Cada tramo de una espira por la que circula corriente, colocada en una región de campo magnético, estará sometido a una fuerza. La consideración de una espira rectangular en un campo magnético uniforme permite obtener interesantes conclusiones.

Espira fija perpendicular al campo magnético

En fig.4.16 se indica mediante cruces una región de campo magnético uniforme, normal al plano del dibujo y entrante al mismo. Las cruces representan la cola de la flecha representativa del vector B.

Si el campo fuese saliente del dibujo, correspondería representar la punta de la flecha mediante puntos.

Debido a que, la contribución a la fuerza sobre cada elemento del alambre colocado en el campo B de la Fig.4.16a tiene igual magnitud y dirección, se puede obtener la fuerza resultante sobre el tramo, sumando algebraicamente cada una de las contribuciones de acuerdo con ecs.4.1.

$$d\vec{F} = idy(\breve{j})xB(-\breve{k}) = -iBdy(\breve{i})$$

$$\vec{F} = \int_0^L d\vec{F}$$

$$\vec{F} = -iB\int_0^L dy(\breve{i}) = -iBL\ (\breve{i})$$

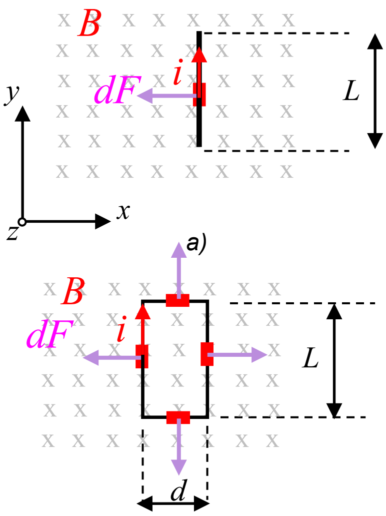


Fig.4.16

Para los lados verticales, fig.4.16b, el valor de la fuerza es:

$$F = BiL$$

Y para los lados horizontales

$$F = Bid$$

En cada lado, la dirección y sentido es la indicada en la figura, pudiéndose comprobar que se anula la fuerza neta sobre la espira y que las fuerzas intervinientes yacen en el mismo plano, de modo que no existe un par de giro sobre la espira. En este caso, como las fuerzas tienden a separar los lados opuestos, la espira debe ser rígida para no experimentar deformación.

La fuerza sobre un tramo de alambre recto colocado en un campo uniforme está dada por el producto entre la corriente por el alambre, su longitud y la magnitud de la componente del campo magnético perpendicular al alambre.

Dependiendo del sentido de la corriente las fuerzas sobre la espira tenderán a expandirla o contraerla siendo nula la resultante.

Espira libre con eje de giro perpendicular al campo magnético uniforme

En Fig.4.17a se esquematiza una espira con corriente colocada en una región en la que el campo magnético es uniforme y paralelo al eje x. La orientación de la espira se indica mediante el ángulo φ formado por la normal a la misma con la dirección del campo magnético. Cada lado de la espira por la que circula corriente estará sometido a una fuerza debido a la interacción con el campo magnético, dada por la ecs.4.1. Sobre el elemento indicado, orientado en dirección negativa del eje z, la fuerza resultante tendrá sentido negativo sobre el eje y.

En fig.4.17b se repite la situación para un elemento de espira sobre un lado perpendicular al eje z donde la fuerza resultante está orientada en la dirección negativa de este eje. Lo mismo ocurre para el lado superior, aunque la fuerza, también sobre el plano de la espira, tiene dirección positiva del eje z.

En fig.4.17c se muestra una vista superior de la espira, indicándose con una cruz la corriente que baja por el alambre 2-1 y con un punto la que sube por el lado 4-3. Esta representación permite comprender que las fuerzas sobre los lados de la espira paralelos al eje z originan un par de giro alrededor de dicho eje.

$$F_{12} = F_{34} = BiL$$

Resultando el par de giro alrededor de eje z:

$$\tau = BiLdsen(\varphi) \qquad \textit{ecs.4.8}$$

$$\tau = iBAsen(\varphi) \qquad \textit{ecs.4.9}$$

Siendo A la superficie de la espira.

Se denomina momento dipolar magnético $\vec{p}_m$ al vector cuyo módulo es igual al producto entre la corriente por la espira y el área encerrada por la misma, su dirección es perpendicular al plano de la espira y el sentido se determina mediante la regla de la mano derecha: tomando con dicha mano un tramo cualquiera de la espira con el pulgar apuntando en el sentido de la corriente (fig.4.18), los restantes dedos indican el sentido del momento dipolar.

El par de giro se puede expresar vectorialmente de la siguiente manera:

$$\vec{\tau} = \vec{p}_m x \vec{B} \qquad \textit{ecs.4.10}$$

Siendo el sentido de giro de la espira de $\vec{p}_m$ hacia $\vec{B}$.

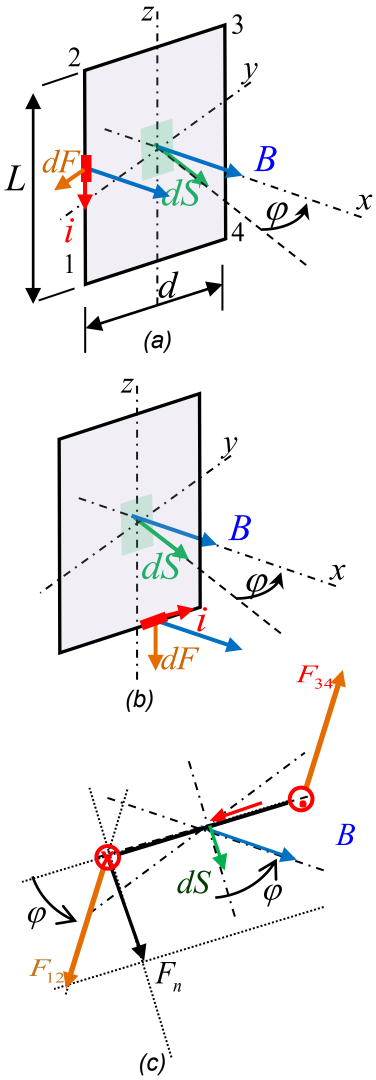


Fig.4.17

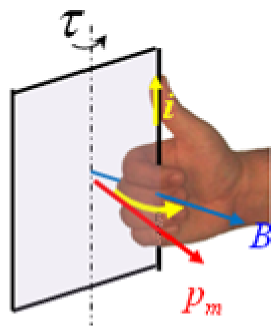


Fig.4.18

Momento magnético dipolar

Independencia de la forma de la espira

Dividiendo la espira en espiras rectangulares elementales por las que circula la misma corriente, es posible demostrar que la expresión anterior, obtenida para una espira rectangular en un campo magnético uniforme, no depende de la forma del lazo formado por la corriente.

El sentido de giro de la espira se obtiene tratando de llevar pm hacia la posición de B por el camino más corto.

En fig.4.19b puede observarse que por los tramos adyacentes entre espiras elementales circulan corrientes iguales y opuestas, cancelándose entre sí.

El resultado es similar al mostrado en fig.4.19a. Por claridad en el dibujo, la espira se dividió en un número pequeño de espiras rectangulares, cada una de ellas con momento dipolar magnético $\vec{p}_{m_i}$ cuya magnitud es el resultado del producto entre la corriente y la superficie encerrada por el rectángulo, siendo su dirección perpendicular al plano de la figura y su sentido saliente de la misma.

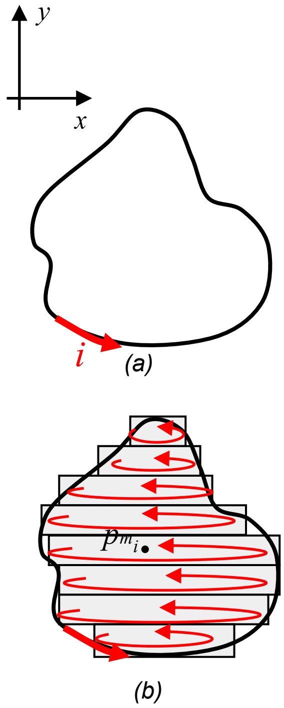


Fig.4.19

$$\vec{p}m_i = iA_i$$

El momento dipolar resultante es la suma de todas estas contribuciones:

$$\vec{p}m = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}m_i = i\sum_{i=1}^{N} A_i\,(\breve{k})$$

Dividiendo en un número cada vez mayor de rectángulos elementales, se comprueba que el momento dipolar magnético no depende de la forma de la superficie A de la espira.

$$\vec{p}m = \lim_{N\to\infty}\left(i\sum_{i=1}^{N} A_i\,(\breve{k})\right)(\breve{k})$$

$$\vec{p}m = i\iint_A dS \quad (\breve{k}) = iA \quad (\breve{k}) \qquad \text{ecs.4.11}$$

La dirección y sentido del momento dipolar magnético se determina con la regla de la mano derecha. Su valor está dado por el producto entre la corriente y el área encerrada por la espira, independientemente de su forma.

Inductancia

En los capítulos anteriores, se trataron circuitos eléctricos en los que la capacidad y resistencia eléctrica permitieron representar la relación entre diferencia potencial y cargas, estáticas o desplazándose por un conductor, sin considerar la distribución de líneas de campo eléctrico intervinientes en cada caso. De manera similar, la inductancia es el parámetro eléctrico utilizado para representar la influencia ejercida sobre un circuito por el flujo magnético originado por una corriente eléctrica.

Cuando el campo magnético se origina por la corriente en el mismo circuito, recibe el nombre de inductancia propia o autoinducción, utilizándose el término inductancia mutua para el caso en que la corriente es generada en un circuito externo.

Autoinducción

En fig.4.20a, se muestra un circuito sobre el plano z=0 indicándose algunas líneas de campo magnético originadas en un tramo del mismo. El sentido de las mismas se obtuvo mediante la regla de la mano derecha indicándose con una x la parte de atrás de la flecha que atravesó el plano z=0 (fig.4.20b). Nuevamente, las líneas de campo magnético salientes del plano del dibujo se representan mediante puntos y las entrantes mediante cruces (fig.4.20c).

Denominando B(P) al campo magnético en un punto P cualquiera de la superficie S limitada por el circuito, el flujo magnético a través del elemento de superficie dS que lo contiene, será:

$$d\phi_B = \vec{B}_{(P)} d\vec{S}$$

Como ocurre con un largo conductor rectilíneo, el campo magnético generado por cualquier distribución de corriente es proporcional a la misma, dependiendo además del medio material y de la posición relativa entre el punto donde se calcula el campo y la corriente. Por este motivo, el flujo magnético también será proporcional a la corriente que produce el campo.

$$d\phi_B \propto i dS$$

La misma proporcionalidad se tendrá para el flujo a través de la superficie S.

$$\phi_B = \iint_S d\phi_B \propto i$$

Cuando el contorno de la superficie S es un circuito de forma cualquiera, el flujo del campo magnético a través de dicha superficie recibe el nombre de flujo enlazado.

Se denomina inductancia a la relación entre el flujo a través de un circuito y la corriente que lo origina.

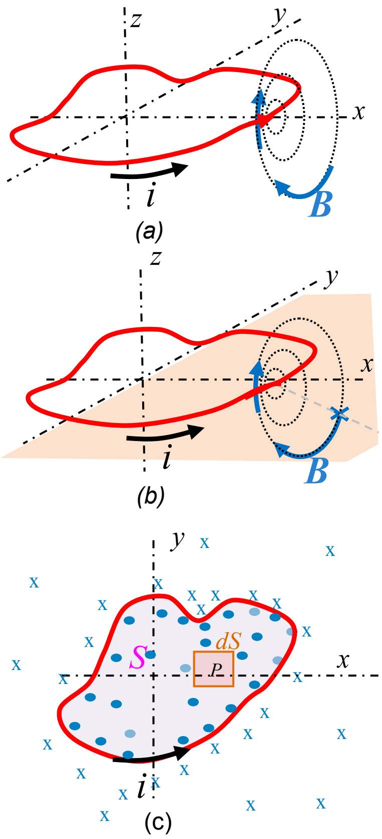


Fig.4.20

Cuando la corriente es la que circula por el circuito considerado, recibe el nombre de autoinducción o inductancia propia.

$$L = \frac{\phi_{B(enlazado)}}{i}$$ ecs.4.12



Fig.4.21

De la misma manera en que la resistencia tiene en cuenta la oposición a la circulación de corriente por un circuito y la capacidad se relaciona con el campo eléctrico producido por las cargas acumuladas, la autoinductancia tiene en cuenta el flujo magnético a través del circuito producido por la corriente en el mismo.

En fig.4.20c el flujo enlazado corresponde a las líneas dirigidas hacia el lector.

La unidad de medida de inductancia en el SI es el henrio (Hy). En fig.4.21 se muestra el símbolo utilizado en circuitos eléctricos para indicar una inductancia.

La inductancia de un circuito depende del medio material en el que se encuentra sumergido y de su forma, siendo independiente de la corriente y del flujo magnético. En algunos medios materiales la linealidad entre corriente y flujo originado es válida en un entorno limitado de valores de la corriente eléctrica.

Inductancia mutua

Cuando dos circuitos están próximos, el campo magnético originado por la corriente en cada circuito origina flujo magnético en el otro. La inductancia mutua tiene en cuenta este efecto.

En fig.4.22 se muestran dos circuitos sin conexión eléctrica. Por simplicidad, en dicha figura se considera que circula la corriente solo en uno de los circuitos, indicándose la intersección con el plano del dibujo de las líneas de campo que contribuyen al flujo en el otro circuito, con puntos rojos (encerrados en un círculo).

Denominando ϕ_{21} al flujo a través del lazo 2 debido al campo magnético generado por la corriente en el circuito 1, se define la inductancia mutua M_{21} como:

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{i_1}$$ ecs.4.13

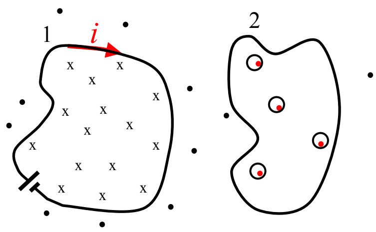


Fig.4.22

De igual manera, la inductancia mutua que tiene en cuenta el flujo magnético en el circuito 1 debido a una corriente en el circuito 2 está dada por:

$$M_{12} = \frac{\phi_{12}}{i_2}$$ ecs.4.14

Su unidad de medida, igual que para la autoinducción es el Hy.

Se puede demostrar que ambas inductancias mutuas son iguales.

$$M_{21} = M_{12} = M \qquad \textit{ecs.4.15}$$

La inductancia mutua considera el flujo magnético a través de un circuito originado por corrientes en otro circuito eléctricamente aislado.

En fig.4.23 se muestran dos bobinas formando parte de dos circuitos eléctricos independientes.

Denominando ϕ_{11} al flujo a través del bobinado 1 debido a su propia corriente, ϕ_{21} al flujo a través del bobinado 2 debido a la corriente por 1 y ϕ_{22}, ϕ_{12} a los flujos por 2 y por 1 originados por la corriente en 2, se puede relacionar la inductancia mutua con la autoinducción de cada bobinado.

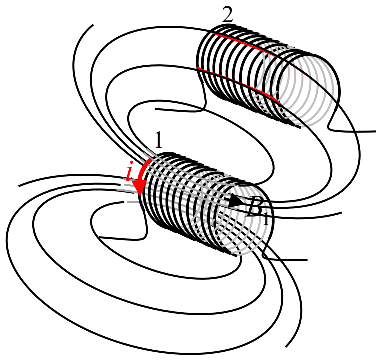


Fig.4.23

$$M^2 = M_{12}M_{21}$$

$$M^2 = \frac{\phi_{12}}{i_2}\frac{\phi_{21}}{i_1}$$

$$M^2 = \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}}\frac{\phi_{22}}{i_2}\frac{\phi_{21}}{\phi_{11}}\frac{\phi_{11}}{i_1} \qquad \textit{ecs.4.16}$$

Como el flujo que cada corriente produce sobre su propio bobinado es mayor o a lo sumo igual que el que produce en el otro bobinado, se puede escribir:

$$\frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} \le 1\,, \quad \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} \le 1$$

De la definición de autoinducción,

$$\frac{\phi_{22}}{i_2} = L_2\,, \quad \frac{\phi_{11}}{i_1} = L_1$$

De esta manera, la inductancia mutua puede expresarse en función de la inductancia de cada circuito:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \qquad \textit{ecs.4.17}$$

En el próximo capítulo se verá que un henrio corresponde a una inductancia en la que se induce una f.e.m. de un voltio cuando la corriente por ella se modifica a razón de un ampere por segundo.

La constante de proporcionalidad k se denomina coeficiente de acoplamiento,

$$0 \le k \le 1 \qquad \textit{ecs.4.18}$$

Inductores

Como sucede con la capacidad y la resistencia eléctrica, la inductancia eléctrica es una característica de los circuitos eléctricos.

La resistencia eléctrica es la oposición que ofrece el material a la circulación de corriente. Por su parte, capacidad eléctrica se relaciona con la cantidad de carga y el trabajo realizado para colocarla en conductor y como se verá en el capítulo 5, es una medida de la oposición a las variaciones en la diferencia de potencial eléctrico. En el mismo capítulo se determina que la inductancia está relacionada con la oposición a las variaciones de corriente eléctrica en un circuito.

Estos tres parámetros están siempre presentes en circuitos. Cuando se dispone parte de un circuito de modo que una de estas características predomine frente a las otras, se obtienen los componentes de circuitos denominados resistores, capacitores e inductores.

Un inductor es un bobinado de alambre en cuyo interior, al ser atravesado por una corriente eléctrica, se concentra la mayor parte del flujo generado por el circuito. Se magnifica este efecto enrollando el alambre sobre un núcleo de hierro.

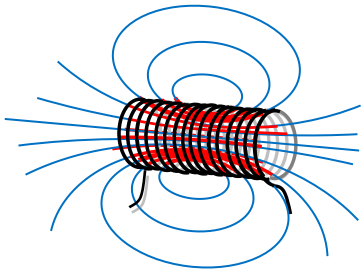


Fig.4.24

En fig.4.24 se esquematizan algunas líneas de campo magnético originadas por la circulación de corriente por el bobinado, pudiendo observarse que las espiras de los extremos son atravesadas por 8 líneas de campo mientras que por las centrales pasan 12 líneas. El flujo total que debe considerarse en el cálculo de la autoinducción es la contribución al flujo de cada una de las espiras. Si el bobinado tiene N espiras y el flujo promedio en cada una de ellas es ϕ_m, la inductancia puede expresarse en función del flujo promedio de la siguiente manera:

$$L = \frac{N\phi_m}{i} \qquad \text{ecs.4.19}$$

Como sucede con los capacitores, la inductancia se modifica cuando se utiliza un medio material como soporte del devanado, siendo notable el aumento observado cuando se utiliza hierro, níquel o aleaciones de materiales ferrosos (núcleo ferro-magnético).

El par de giro de una espira es proporcional a la intensidad del campo en que está colocada.

La utilización de núcleos de material ferro-magnético aumenta la intensidad del campo producido para la misma intensidad de corriente por los bobinados.

Materiales ferro-magnéticos

En la mayoría de los materiales el campo magnético no difiere de manera significativa respecto al correspondiente al vacío. En los agrupados bajo la denominación de ferro-magnéticos se observa un incremento del campo magnético respecto al que, para las mismas condiciones, se tiene en el vacío.

En estos materiales, grupos de átomos se comportan de manera similar a pequeños imanes (dominios magnéticos), con su correspondiente momento dipolar magnético. Generalmente, los diferentes dominios que componen el material se encuentran distribuidos al azar (fig.4.25a) siendo nula o muy pequeña la magnetización resultante.

Cada uno de estos dominios puede modelarse mediante una espira con corriente (fig.4.25b).

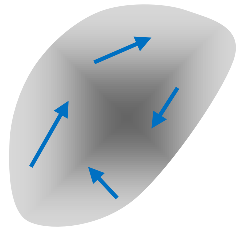
Para analizar el comportamiento de estos materiales cuando se los coloca en una región en la que existe campo magnético, por ejemplo generado por la circulación de corriente por un bobinado, utilizaremos algunos términos que servirán para diferenciar los factores intervinientes.

La corriente que es impulsada por el bobinado, tal como se trató en el Capítulo 3, está formada por portadores de carga moviéndose en promedio en la misma dirección. Estos portadores son impulsados por una fuerza electromotriz y "conducidos" a lo largo del circuito del cual forma parte el inductor. Por este motivo se denomina a esta, corriente de conducción i_C para diferenciarla de la corriente utilizada para representar el efecto del material, denominada corriente de magnetización i_m.

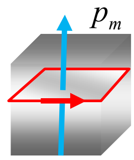
De igual forma, utilizaremos el subíndice 0 para el campo magnético en ausencia de medio material indicando con B_m al campo resultante en el material.

Ampere propuso un modelo en el que la contribución al campo originada en la alineación de los dominios magnéticos es la misma que se tendría si por el bobinado circula una corriente adicional (fig.4.25c).

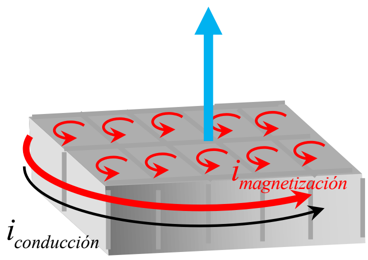
De esta manera, considerando ambas fuentes del campo magnético la ecs.4.4 queda:



(a)



(b)



(c)

Fig.4.25

$$\oint_C \vec{B}d\vec{\ell} = \mu_0(i_c + i_m) \qquad ecs.4.20$$

A medida que aumenta la corriente por la bobina aumenta la alineación de dominios y por tanto la corriente equivalente de magnetización. La relación entre ambas corrientes depende del material y de la magnitud del campo en el mismo. Por este motivo, la ecs.4.20 se suele expresar en función de la permeabilidad μ del material que tiene en cuenta estos efectos.

$$\oint_C \vec{B}d\vec{\ell} = \mu i_c \qquad ecs.4.21$$

Se denomina permeabilidad relativa a la relación entre la permeabilidad del material y la correspondiente al vacío:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad ecs.4.22$$

Para una corriente de pequeña intensidad por el bobinado, los dominios que constituyen el material tratarán de alinearse con el campo magnético originado volviendo a su posición original cuando el campo desaparece.

Aumentando la intensidad de la corriente, los dominios comienzan a crecer en la dirección del campo aplicado incorporando átomos vecinos. Esta es la parte lineal de fig.4.26a, donde la permeabilidad es constante.

Para corrientes de mayor intensidad los dominios comenzarán a rotar hasta alinearse completamente con el campo aplicado.

A partir de esta condición, incrementos posteriores del campo aplicado no producen un aumento significativo en el campo resultante en el material, alcanzándose del valor de saturación, B_{sat} (fig.4.26c).

Durante su rotación, un dominio puede encontrarse con un dominio vecino o impurezas del material que dificultan su alineación con el campo. Para vencer estos obstáculos se necesita energía adicional que es provista por la fuente que impulsa la corriente por el bobinado.

Iniciadas las rotaciones, al quitar el campo externo los dominios no volverán a recuperar su posición inicial quedando cierta cantidad de ellos alineados.

La energía necesaria para alinear los dipolos magnéticos es trabajo adicional que debe realizar la fuente que impulsa la corriente por los bobinados cuando establece el campo en el material.

Cuando se anula dicha corriente, dependiendo del material quedan dominios alineados originando campo magnético sin necesidad de corriente externa.

Los imanes se construyen con materiales con magnetismo remanente intenso.

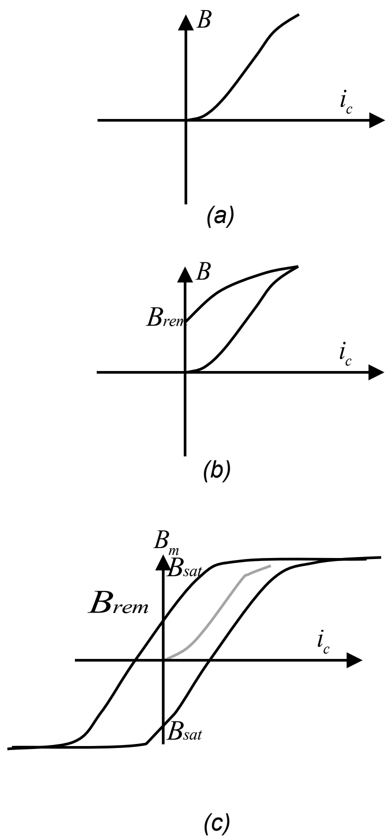


Fig.4.26

Por este motivo, el material presentará cierto grado de magnetización o magnetismo remanente, B_{rem} cuando se anule la corriente externa o de conducción (fig.4.26b).

De esta forma el material adquiere características de imán permanente debiendo aplicarse un campo en sentido contrario para desmagnetizarlo.

En la fig.4.26c se muestra la curva de magnetización típica para un material ferro-magnético, en la que se grafica el campo en el material en función de la corriente aplicada. La curva central corresponde a la primera vez que se orientan los dominios magnetizando al material.

Modificando la corriente entre cero y un valor máximo en ambos sentidos, se forma un lazo denominado "ciclo de histéresis". La superficie encerrada por el mismo es proporcional a la energía empleada en la orientación de los dominios magnéticos, depende del tipo de material y se conoce con el nombre de pérdidas por histéresis.

Existen varios tipos de materiales empleados en la construcción de inductores y transformadores siendo el acero al silicio, una composición de hierro con un bajo porcentaje de silicio, el material magnético más utilizado. Su permeabilidad relativa es del orden de 10^4 y la densidad de flujo de saturación de 1,6 T.

Las máquinas eléctricas generalmente basan su funcionamiento en la utilización de corrientes que varias veces por segundo invierten la orientación de los dipolos magnéticos. La energía necesaria para esto es proporcional al área encerrada por la curva de magnetización. Por este motivo, los materiales utilizados para estas aplicaciones son aquellos en los que el ciclo de histéresis es angosto.

El valor de saturación del campo, B_{sat} es aquel para cual la mayoría de los dominios están alineados.

Circuito equivalente de un inductor

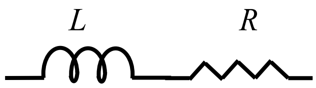


Fig.4.27

El circuito equivalente más simple de un inductor es el mostrado en fig.4.27 donde la inductancia L representa el flujo magnético por unidad de corriente a través del bobinado mientras que la resistencia tiene en cuenta la energía transferida al medio, frecuentemente mencionada como "pérdidas de energía".

Este circuito equivalente es válido para corrientes continuas y alternas de no muy alta frecuencia.

En un inductor sin núcleo material estas pérdidas se reducen a la energía disipada en la resistencia del alambre del bobinado mientras que, en aquellos con núcleo de material ferro-magnético, esta resistencia tiene en cuenta además la energía necesaria para alinear los dipolos con el campo magnético y como se trata en el siguiente capítulo, las pérdidas originadas por las corrientes inducidas en el hierro.

Generación de campos magnéticos con corrientes

A menudo la realización de experiencias con campos magnéticos requiere el establecimiento de un campo uniforme en una región, con magnitud suficientemente grande respecto a la del campo magnético terrestre. Utilizando la expresión del campo magnético generado por un alambre recto, puede comprobarse que mediante una corriente de 1A, el campo magnético a 1cm del alambre resulta del mismo orden de magnitud que el campo magnético terrestre.

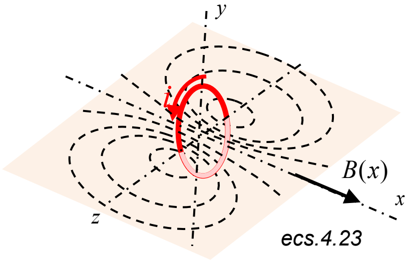
Para obtener campos más intensos se necesitan mayores corrientes, aumentando la potencia disipada en el hilo y en el circuito eléctrico asociado, con el consiguiente aumento en el tamaño de los componentes y costo del equipamiento requerido.

Una solución que además permite mejor aprovechamiento del espacio disponible, se consigue haciendo circular la corriente por espiras próximas, formando un bobinado.

Utilizando alambre de cobre grueso es posible formar el bobinado sin un soporte material. Cuando se requiera una forma o núcleo para soportar las espiras, este podrá ser de cartón, madera, etc. obteniéndose resultados similares a los correspondientes a bobinados sin núcleo material.

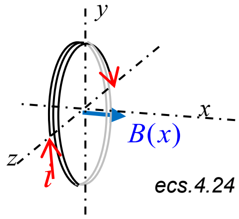
Cuando se utilizan materiales ferro-magnéticos para los núcleos, la intensidad del campo magnético generado se incrementa cientos de veces respecto a la que se tendría para la misma corriente sin núcleo material. En este caso cuando el campo magnético se aproxima a su valor de saturación, la relación entre la corriente por el bobinado y el campo magnético deja de ser lineal.

En fig.4.28 se dibujan, sobre el plano y=0, algunas líneas del campo magnético generado por una espira con corriente. Aunque las líneas se cierren alrededor de cada tramo del conductor, puede observarse que en la parte central son perpendiculares al plano de la espira.



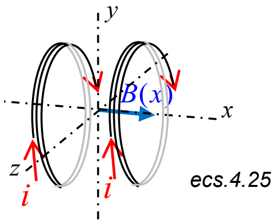
$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} \quad (\breve{i})$$

Fig.4.28



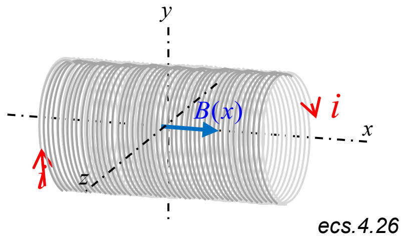
$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 N i}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} \quad (\breve{i})$$

(a)



$$B_{eje} = \frac{\frac{\mu_0 N i R^2}{2}}{\sqrt{\left(R^2 + \left(\frac{R}{2} - x\right)^2\right)^3}} + \frac{\frac{\mu_0 N i R^2}{2}}{\sqrt{\left(R^2 + \left(\frac{R}{2} + x\right)^2\right)^3}}$$

(b)



$$B_{eje} = \left(\frac{\frac{\mu_0 N i}{2L}\left(\frac{L}{2} - x\right)}{\left(R^2 + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2\right)^{1/2}} + \frac{\frac{\mu_0 N i}{2L}\left(\frac{L}{2} + x\right)}{\left(R^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right)^2\right)^{1/2}} \right)$$

(c)

Fig.4.29

Una bobina plana consiste en N espiras apretadas en un espesor pequeño respecto a las dimensiones de la espira (fig.4.29a), resultando el campo magnético en el eje igual a la suma de las contribuciones de todas las espiras.

Otro dispositivo utilizado para la generación de campos magnéticos consiste de dos bobinas planas paralelas, idénticas, separadas una distancia igual al radio y conectadas en serie (bobinas de Helmholtz, fig.4.29b).

Cuando la longitud del bobinado no es despreciable, recibe el nombre de bobina recta (fig.4.29c).

En fig.4.30 se representa la variación del campo sobre el eje en función de la distancia para estas tres configuraciones, pudiéndose observar mayor uniformidad en la zona central de una bobina recta. Dependiendo de la experiencia a implementar, puede ser más conveniente utilizar las dos bobinas planas en serie. Debe tenerse en cuenta que, para la misma corriente por el bobinado, el máximo valor del campo depende de la cantidad de espiras y de su distribución.

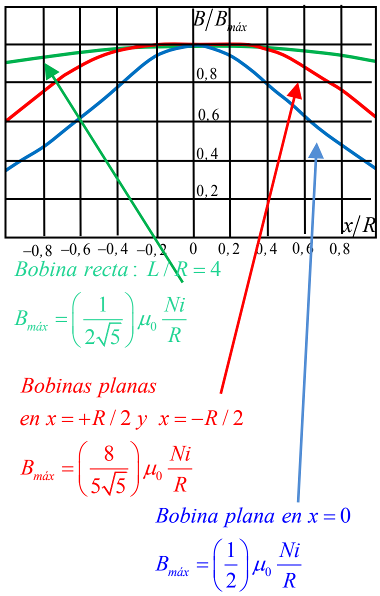


Fig.4.30

Aumentando la longitud de la bobina recta se extiende la zona central en la que el campo magnético es uniforme. Para L>>R, la intensidad del campo en el centro duplica al valor en sus extremos.

El solenoide, es un bobinado ideal de longitud infinita en que el campo es uniforme en toda su extensión. Al no tener extremos no existen líneas de campo en su exterior, pudiéndose utilizar la ley de Ampere para determinar su intensidad. En fig.4.31 el camino C encierra N espiras por las que circula una corriente i, obteniéndose:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 Ni$$

Para evaluar la integral se debe tener en cuenta que la única contribución a la misma se tiene en el tramo de longitud ℓ interno al solenoide, debido a que en el exterior el campo es nulo y los tramos laterales son perpendiculares al campo.

$$\int_a^b B d\ell \cos(0^\circ) = B\ell$$

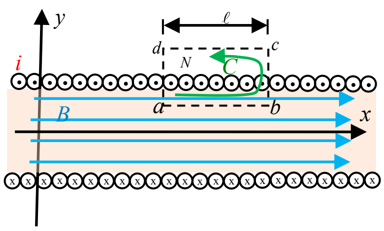


Fig.4.31

Reemplazando estos resultados en la expresión de la ley de Ampere, se obtiene la expresión para el campo en el interior del solenoide:

$$\vec{B} = \mu_0 i\left(\frac{N}{\ell}\right) \quad (\breve{i}) \qquad ecs.4.27$$

Denominando n al número de espiras por unidad de longitud del bobinado,

$$\vec{B} = \mu_0 ni \quad (\breve{i}) \qquad ecs.4.28$$

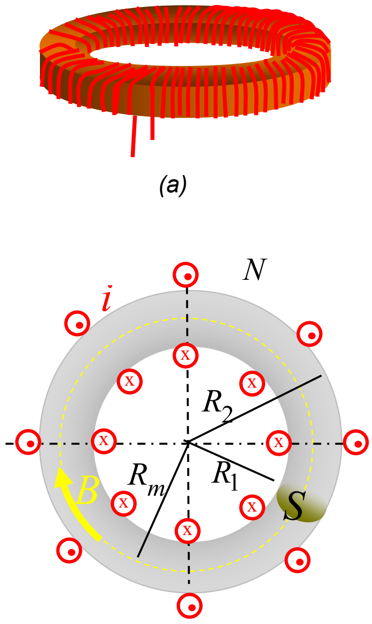
Cada una de las espiras que forman el bobinado es atravesada por el campo magnético de modo que el flujo enlazado por unidad de longitud del bobinado será:

$$\frac{\phi}{\ell} = \frac{NBS}{\ell} = \mu_0 n^2 Si \qquad ecs.4.29$$

y la inductancia por unidad de longitud:

$$\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 S \qquad \left(\frac{H_y}{m}\right) \qquad ecs.4.30$$

La manera de obtener prácticamente un bobinado sin extremos es devanando las espiras sobre un núcleo cerrado, formando un toroide (fig.4.32a).



(a)

(b)

Fig.4.32

Como en el solenoide, si las espiras están suficientemente juntas, las líneas de campo son paralelas al eje de la forma. Para aplicar la ley de Ampere, se elige una circunferencia de radio r :

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \qquad R_1 < r < R_2 \qquad ecs.4.31$$

Si el espesor del toroide es pequeño frente a su radio, con buena aproximación puede considerarse que el campo es uniforme e igual al valor correspondiente al radio medio del toroide. En estas condiciones, el flujo que atraviesa una espira de sección transversal S (fig.4.32b), será:

$$\phi_{espira} = \iint_S \vec{B}d\vec{S} \approx \frac{\mu_0 NiS}{2\pi R_{medio}}$$

$$R_{medio} = \frac{R_1 + R_2}{2}, \qquad R_2 - R_1 << R_1$$

Como el bobinado tiene N espiras, el flujo enlazado por el circuito será N veces el que atraviesa una espira. De esta manera, es posible calcular la inductancia del toroide en función de sus radios interno y externo.

$$L_{toroide} \approx \frac{\mu_0 SN^2}{\pi(R_1 + R_2)} \quad ; \quad R_2 - R_1 << R_1 \qquad ecs.4.32$$

Expresión que permite estimar el valor de una inductancia de un bobinado toroidal con núcleo de aire.

Ejercicio 4.1

Se utiliza alambre barnizado de 0,1 mm^2 de sección transversal para construir un bobinado sobre un aro de madera de radio externo R_2=2cm, radio interno R_1=1,5cm y sección transversal circular.

a) Calcule el número máximo de espiras que podrá ubicar en una capa del bobinado.

b) Considerando la permeabilidad magnética del material utilizado igual a la del vacío, determine el valor aproximado de la inductancia y resistencia del inductor.

c) Calcule el máximo valor que puede tener el campo magnético en el interior del bobinado si se adopta para el alambre del bobinado una densidad de corriente máxima de $2A/mm^2$.

Utilizando un núcleo de material ferro-magnético, para el mismo bobinado se consigue aumentar considerablemente la inductancia. Lo mismo ocurre con el campo obtenido para igual intensidad de corriente.

Como ocurre con resistores y capacitores, el valor definitivo de las características eléctricas se obtiene por medición.

La determinación experimental de la inductancia de un inductor requiere la utilización de corrientes variables en el tiempo y será tratada en el capítulo 6.

Solución:

De la sección transversal se obtiene el diámetro del alambre y el número de espiras que se puede ubicar en la parte interna del núcleo.

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 0,36 \qquad (mm)$$

$$N_{máx} = \frac{2\pi R_1}{d} = 261$$

De los datos del problema se puede comprobar que $R_2 - R_1$ resulta tres veces menor a R_1. De la ecs.4.32 se obtiene para la inductancia un valor próximo a 15,3 μH.

Para calcular la resistencia del bobinado se puede considerar que la misma no difiere de manera apreciable de aquella que tiene el alambre estirado. La longitud del mismo se determina a partir de la longitud de cada espira:

$$\ell_{espira} = \pi(R_2 - R_1) = 1,57cm$$

$$\ell_{alambre} = N\ell_{espira} = 410cm$$

$$R_{alambre} = \frac{\rho \ell_{alambre}}{S}$$

Para alambre de cobre, la resistividad a 22ºC es 17,3 nΩ.m, resultando R~0,71Ω.

Para la máxima densidad de corriente especificada, resulta 0,2A de corriente. Con este valor de corriente en ecs.4.31, evaluada para el radio medio del toroide, el campo en el interior del material será cercano a 0,6mT.

Utilización de campos magnéticos en máquinas eléctricas

Para realizar trabajo sobre un conductor con corriente eléctrica es necesario establecer el campo magnético en una región del espacio donde el conductor pueda moverse con cierto grado de libertad.

Este campo puede ser originado por imanes o por corrientes eléctricas. Como podrá comprenderse, el toroide del ejemplo anterior no será útil a menos que se produzca una interrupción como se muestra en fig.4.33a. En fig.4.33b se muestra una manera de generar el campo magnético en la región en que se mueve, por ejemplo, la espira de fig.4.17. En este caso, el campo es generado por bobinados por los que se hace circular una corriente eléctrica, denominados bobinados de campo. En algunas aplicaciones este campo es producido por un imán de forma adecuada

Las bobinas de campo se devanan sobre núcleo de material ferro-magnético. En ausencia de un material con estas características además de ser menor la intensidad del campo resultante, algunas líneas se cierran sin llegar a la zona de interés (fig.4.33c).

De ecs.4.6 se desprende que en aquellos casos en que la corriente por el conductor sobre el que se quiere realizar un trabajo es la misma que genera el campo, el par mecánico realizado resulta proporcional al cuadrado de la corriente eléctrica. Por este motivo, para este tipo de aplicaciones la intensidad de la corriente utilizada es de fundamental importancia para la generación de pares motores de magnitud considerable.

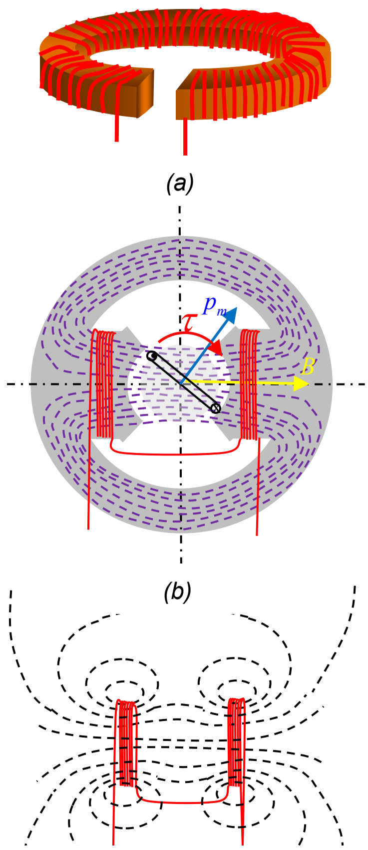


Fig.4.33

Dentro de las posibles aplicaciones que utilizan campos magnéticos, se relacionan con temas tratados en este capítulo la posibilidad de convertir energía eléctrica en mecánica, los transformadores, basados en acoplamiento magnético entre circuitos eléctricamente aislados y utilizados en corriente alterna y las inductancias utilizadas junto con capacitores en circuitos sintonizados y filtros .

Los circuitos magnéticos

Existen muchas aplicaciones en las que se utilizan núcleos ferro-magnéticos para "conducir " el flujo magnético.

La ecs.4.2 se refiere a la cantidad de líneas de campo a través de determinada superficie. Puesto que las líneas de campo magnético se cierran alrededor de las corrientes eléctricas que les da origen, si se considera una superficie cerrada en la región de campo magnético, como un globo inflado, todas las líneas que entran por un lado a dicha superficie saldrán por el otro.

En fig.4.34 se muestran algunas líneas originadas en un elemento de corriente y una superficie cerrada atravesada por las mismas. Lo mismo ocurre para las líneas originadas en los restantes elementos de corriente que forman el circuito eléctrico.

Cuando se considera una superficie imaginaria cerrada, el número neto de líneas a través de ella será nulo.

En este caso, la ecs.4.2 resulta:

$$\iint_{SC} \vec{B} d\vec{S} = 0 \qquad \text{ecs.4.33}$$

Cuando se establece un campo magnético en un núcleo de material ferro-magnético, debido su elevada permeabilidad, las líneas de campo se distribuyen con mayor facilidad en el núcleo que en el vacío. En fig.4.35 se muestran algunas líneas de campo magnético en un trozo de material en el que existe una interrupción o entrehierro.

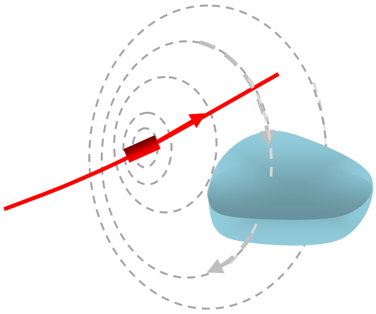
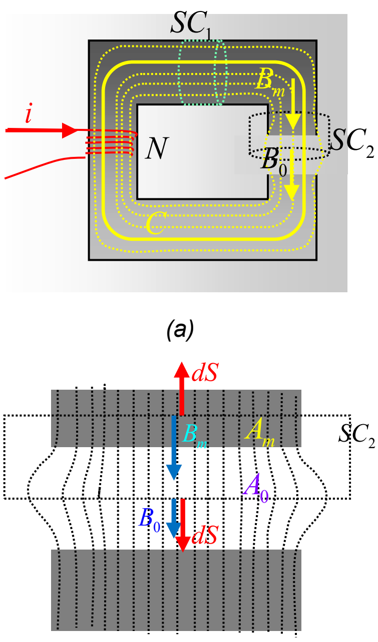


Fig.4.34

Tomando una superficie cerrada imaginaria, cuya intersección con el plano del dibujo se indica con SC_2 en fig.4.35b, y teniendo en cuenta que las líneas siguen la forma del material, no existe flujo a través de su superficie lateral. Por este motivo, el flujo a través de la tapa izquierda debe ser igual al que atraviesa la tapa derecha (ecs.4.33).

En los bordes del entrehierro, las líneas tienden a doblarse cerrándose alrededor de la corriente que las genera, aunque debido a la atracción ejercida por el hierro magnetizado del otro extremo del entrehierro, se curvan como se muestra en fig.4.35b distribuyéndose en una superficie A_0 mayor a la correspondiente en el hierro, A_m. La diferencia porcentual entre ambas es tenida en cuenta en la dispersión δ :



(a)

(b)

Fig.4.35

$$A_0 = A_m \left(1 + \delta\right) \qquad 0 < \delta < 1 \qquad \text{ecs.4.34}$$

Como las líneas entran a la superficie en igual cantidad a las que salen, el flujo a través de ambas superficies es el mismo resultando:

$$\phi = A_m B_m = A_0 B_0 \qquad \text{ecs.4.35}$$

La ecs.4.21, que establece la relación entre el campo magnético en un medio material y la corriente eléctrica que lo genera, se refiere a una curva cerrada en el material.

Debido a que el camino elegido (fig.4.35a), encierra a N espiras por las que circula una corriente i, representando a cada tramo de la curva con $d\ell$, resulta:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = \mu N i$$

Que puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu} d\vec{\ell} = Ni \qquad \text{ecs.4.36}$$

El término de la izquierda de ecs.4.36 contiene las características del medio material y campo magnético en él mientras que en la derecha están las variables correspondientes al circuito eléctrico.

Como la curva comprende medios con diferente permeabilidad, el campo magnético será diferente en cada caso, como se desprende de ecs.4.35 debiéndose evaluar el producto escalar para cada tramo:

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu} d\vec{\ell} = \int_{C_{hierro}} \frac{\vec{B}_h}{\mu_h} d\vec{\ell} + \int_{C_{aire}} \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} d\vec{\ell} \qquad \text{ecs.4.37}$$

En un material ferro-magnético, aunque la dependencia del campo con la corriente que lo genera no sea estrictamente lineal (fig.4.26), existe un tramo de la curva característica del material en que puede considerarse que la permeabilidad es constante. Bajo estas condiciones y considerando el valor promedio del campo en cada caso, la ecs.4.37 queda:

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu} d\vec{\ell} = \frac{B_h}{\mu_h} \ell_h + \frac{B_0}{\mu_0} \ell_0$$

Donde ℓ_h y ℓ_0 se refieren al recorrido medio en cada material. Reemplazando en 4.36

$$Ni = \frac{B_h}{\mu_h} \ell_h + \frac{B_0}{\mu_0} \ell_0 \qquad \text{ecs.4.38}$$

Las ecs.4.33 y 4.38 tienen sus análogas en los circuitos eléctricos. La ecs.4.33 establece que en una bifurcación, el flujo entrante debe ser igual al saliente, de manera similar a como ocurre con las ecuaciones de nodos en circuitos eléctricos.

En cada lazo formado en un circuito eléctrico, la fuerza electromotriz resultante en el lazo se reparte en las caídas de potencial de cada tramo del mismo. La analogía para el circuito magnético denomina fuerza magneto-motriz (f.m.m.) al producto Ni, expresada en Amper-espiras.

De ecs.4.35 y ecs.4.38,

$$Ni = \phi \left(\frac{\ell_m}{A_m \mu} + \frac{\ell_0}{A_0 \mu_0} \right) \qquad \text{ecs.4.39}$$

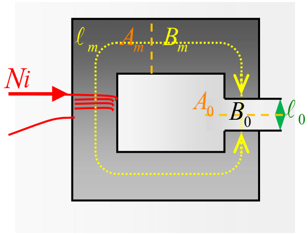


Fig.4.36

Conociendo las dimensiones físicas del circuito magnético y permeabilidad del material utilizado, es posible determinar los Amper-espiras necesarios para obtener determinado valor del campo magnético en el entrehierro.

En el segundo tomo se expresa ecs.4.36 en función de la intensidad magnética H, vector que depende de la corriente de conducción y forma del lazo siendo independiente del material.

$$\oint_C \vec{H} d\vec{\ell} = Ni$$

Esta expresión junto con ecs.4.33 son las definiciones de los vectores H y B, relacionados entre sí mediante la permeabilidad del medio.

Cada uno de los términos dentro del paréntesis, denominado reluctancia magnética de un material, $\Re_m$, equivale a una resistencia eléctrica.

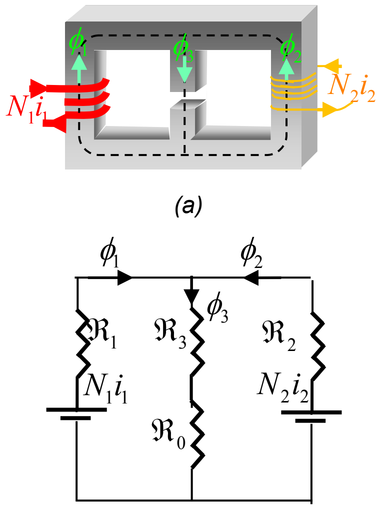
$$\sum f.m.m = \phi \sum \Re$$

$$\sum \phi_{entrante} = \sum \phi_{saliente}$$

La reluctancia depende del material y es directamente proporcional a la longitud del camino que recorre el flujo magnético e inversamente proporcional al área de la sección transversal correspondiente.

La ecs.4.39 permite expresar el campo en el entrehierro en función de las demás variables:

$$B_0 = \frac{\mu_0 Ni}{\ell_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{A_0}{A_m} \frac{\mu_0}{\mu} \frac{\ell_m}{\ell_0}\right)} \qquad \text{ecs.4.40}$$



(a) (b)
Fig.4.37

En fig.4.37a se muestra un circuito magnético típico en el que por los bobinados circula corriente eléctrica. Utilizando la ecs.4.38 para cado lazo y considerando, según ecs.4.33, que el flujo entrante en un nodo es igual al flujo saliente, se puede determinar el flujo magnético en cada rama del circuito aplicando las reglas de resolución tratadas en el capítulo anterior (fig.4.37b).

$$\phi_1 + \phi_2 = \phi_3$$

$$N_1 i_1 = \phi_1 \Re_1 + \phi_3 (\Re_3 + \Re_0)$$

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \phi_1 \Re_1 - \phi_2 \Re_2$$

Instrumentos de imán permanente y bobina móvil

El funcionamiento del galvanómetro de imán permanente y bobina móvil (d'Arsonval, 1882), utilizado para medir pequeñas intensidades de corriente, se basa en el par generado sobre una espira con corriente en un campo magnético. Consta de una bobina plana que puede girar entre los polos de un imán permanente.

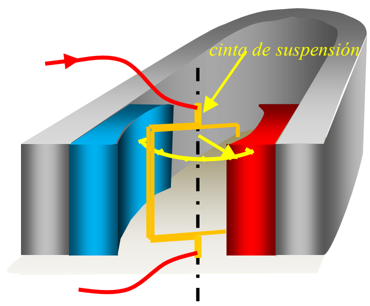


Fig.4.38

Cuando por el bobinado de N espiras y área A circula la corriente a medir se ejerce sobre el mismo un par de giro, que, para una desviación θ entre la espira y el campo, responde a la ecs.4.10 resultando:

$$\tau_m = iNBAsen(\theta) \qquad \text{ecs.4.41}$$

El conjunto está suspendido mediante una cinta metálica que se opone al giro con un par τ_a:

$$\tau_a = k_\theta \theta \qquad \text{ecs.4.42}$$

Se puede obtener una escala lineal modificando la forma de los polos del imán en herradura para que el flujo magnético a través del cuadro no se modifique de manera apreciable en todo el rango de giro.

Siendo k_θ la constante de torsión de la cinta y θ el ángulo de giro del bobinado.

Alcanzada la posición de equilibrio en que se igualan las ecs.4.41 y 4.42, la desviación de una aguja adosada al cuadro móvil se relaciona con la corriente por el mismo mediante la siguiente expresión:

$$i = \left(\frac{k_\theta}{NBA} \right) \frac{\theta}{sen(\theta)}$$

El término entre paréntesis depende de factores constructivos del aparato y constituye la constante de instrumento k_{inst}

$$i = k_{inst} \frac{\theta}{sen(\theta)} \qquad \textit{ecs.4.43}$$

Debido a la resistencia del alambre del cuadro móvil, cinta de suspensión y demás elementos por los que circula corriente, cuando se intercala el galvanómetro en un circuito se produce una caída de potencial. Este efecto se tiene en cuenta en un término resistivo, denominado resistencia interna del galvanómetro, R_i.

Los factores constructivos que influyen en la sensibilidad de un instrumento de este tipo pueden obtenerse por inspección de los términos intervinientes en la constante del instrumento.

El amperímetro y el voltímetro de cuadro móvil tienen el mismo principio de funcionamiento que el galvanómetro, con algunas diferencias. En estos casos en que la sensibilidad no es tan importante como en el galvanómetro, el bobinado de un amperímetro se construye con alambre de mayor grosor según la corriente para la que está diseñado mientras que si se trata de un voltímetro, el bobinado es de alambre fino de muchas vueltas debido a la necesidad de una alta resistencia interna.

Como se trata en el capítulo 3, con el agregado de resistencias es posible construir, utilizando un galvanómetro, un amperímetro y/o un voltímetro de corriente continua.

Motor de corriente continua

En el galvanómetro de bobina móvil, el cuadro móvil llega a la posición de equilibrio cuando se iguala el par motor con el par antagonista. Si no se opone resistencia al giro del bobinado, el mismo continuará girando hasta que el plano de la espira y el campo magnético sean perpendiculares entre

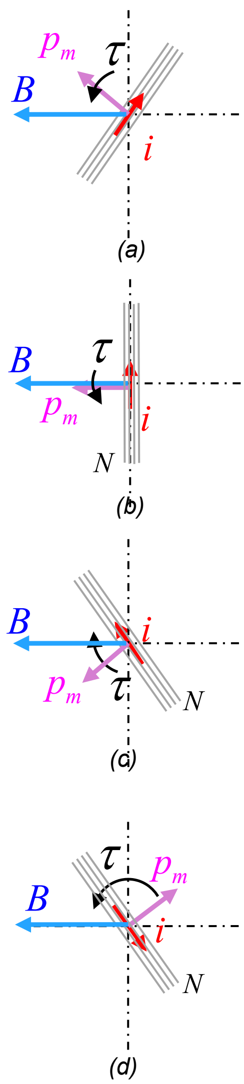


Fig.4.39

sí, oscilando alrededor de dicha posición, como se indica en fig.4.39a, b y c que es una vista superior de la bobina con corriente.

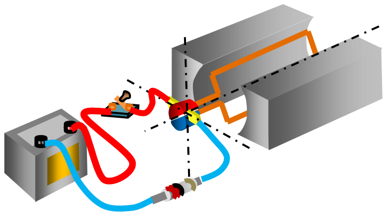


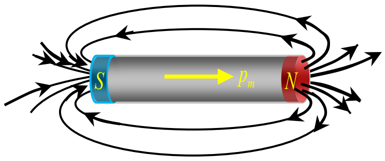
Fig.4.40

Una forma de lograr que el sistema continúe girando en el mismo sentido se consigue invirtiendo la corriente en el bobinado cada vez que se alcanza la posición en que el momento dipolar se alinea con el campo. De esta manera, se invierte el sentido del momento magnético de la espira y ésta continúa moviéndose sin modificarse el sentido de giro (fig.4.39d).

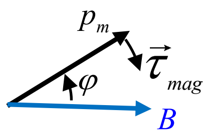
En fig.4.40 se muestra la inversión del sentido de la corriente eléctrica utilizando un disco conductor separado en dos mitades que se conectan al circuito eléctrico mediante carbones.

Medida de campos magnéticos estáticos

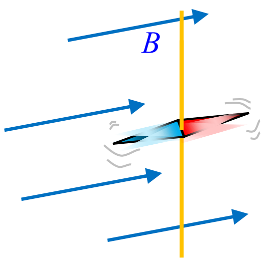
Debido a que el patrón de líneas de un imán recto, fig.4.41a, es similar al de la bobina recta (fig.4.24) y al de la espira (fig.4.28), se le puede asociar un momento dipolar magnético $\vec{p}_m$ cuya dirección coincide con la barra y se dirige desde el polo sur al norte de la misma. Por este motivo, la determinación experimental de ecs.4.3 puede tratarse como otro ejemplo de aplicación de la ecs.4.10.



(a)



(b)



(c)

Fig.4.41

Apartando la aguja magnetizada un ángulo φ de la posición de equilibrio (fig.4.41b), debido a la existencia del campo magnético se ejercerá un par tendiente a recuperar la posición de equilibrio. La rotación de la aguja será el resultado del par magnético menos la oposición ejercida por fricción, proporcional a la velocidad de rotación de la aguja y la torsión del hilo, proporcional al ángulo de giro de este.

$$\tau_{mag} - k_v \frac{d\varphi}{dt} - k_\varphi \varphi = \Im \frac{d^2\varphi}{dt_2} \qquad \text{ecs.4.44}$$

$\Im$ representa al momento de inercia de la aguja, k_v es una constante que tiene en cuenta la viscosidad del medio y k_φ la torsión del hilo.

La barra comenzará a moverse sobrepasando la posición de equilibrio hasta invertir el sentido de giro observándose oscilaciones que se irán amortiguando hasta alinearse con el campo magnético.

Es posible encontrar de manera aproximada la relación entre la magnitud del campo y el número de oscilaciones por unidad de tiempo, despreciando el rozamiento de los puntos de apoyo y del aire que rodea la varilla. En estas condiciones, la frecuencia de oscilación resultante no sería muy diferente de la correspondiente al movimiento amortiguado.

De ecs.4.10,

$$\tau_{mag} = p_m B sen(-\varphi) = -p_m B sen(\varphi) \quad \textit{ecs.4.45}$$

Para pequeñas oscilaciones de la aguja,

$$sen(\varphi) \approx \varphi \qquad \textit{ecs.4.46}$$

Con estas aproximaciones, resulta:

$$\frac{d^2\varphi}{dt_2} + \frac{p_m B}{\Im}\varphi = 0 \qquad \textit{ecs.4.47}$$

Una solución de esta ecuación diferencial, es la función φ(t):

$$\varphi(t) = \varphi_{máx} sen(\omega_0 t) \qquad \textit{ecs.4.48}$$

Derivando dos veces respecto al tiempo y reemplazando en ecs.4.48 se comprueba que es una solución de la ecuación diferencial y que la frecuencia angular de oscilación se relaciona con los parámetros de sistema mediante la siguiente expresión:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{p_m B}{\Im}} \qquad \textit{ecs.4.49}$$

Para relacionar el tiempo que tarda la aguja en completar una oscilación, periodo T, con ω_0 se debe tener en cuenta que la función seno se repite cada 2π radianes:

$$\omega_0 T = 2\pi \qquad \textit{ecs.4.50}$$

De donde resulta,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{p_m B}{\Im}}} = \frac{k}{\sqrt{B}} \qquad \textit{ecs.4.51}$$

Donde se agrupó en la constante k las características de la aguja magnética.

Para una posición determinada de la aguja, se cuenta el número de oscilaciones completas durante determinado intervalo de tiempo. El periodo se obtiene dividendo el intervalo de tiempo de medida por la cantidad de oscilaciones.

Por ejemplo, si para una posición identificada con el numero 1 corresponde un campo B_1 y un periodo T_1 y para

Por intermedio de campos magnéticos estáticos, generados mediante imanes fijos o a partir de corrientes independientes del tiempo, se puede convertir energía eléctrica en mecánica dando lugar a innumerables aplicaciones prácticas de la Ingeniería.

Los resultados obtenidos al considerar imanes en movimiento y corrientes variables en el tiempo además de ampliar enormemente el campo de aplicación, serán de utilidad al tratar los fundamentos de las ondas electromagnéticas.

otra posición 2, B_2 T_2, la relación entre el valor del campo en cada uno de esos puntos será:

$$\frac{B_1}{B_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \qquad \textit{ecs.4.52}$$

En el segundo tomo se deduce la expresión del campo magnético para algunas configuraciones de corriente, pudiéndose adelantar que en general no es una tarea simple. Afortunadamente, muchas situaciones pueden resolverse utilizando el concepto de inductancia. Cuando es posible su determinación experimental, permite evaluar el flujo magnético producido por determinada corriente sin necesidad de realizar complicados cálculos de campos magnéticos.

ACTIVIDADES

4.1 Suponga que en determinada región, la componente horizontal del campo magnético terrestre es de 0,04mT. ¿Qué intensidad de corriente deberá circular por un alambre recto para generar un campo magnético diez veces más intenso a un centímetro del mismo?

4.1) Para implementar experiencias con campos magnéticos originados por corrientes, se debe tener en cuenta la influencia sobre las mismas del campo magnético terrestre.

4.2 a) Considerando que por el alambre circula una corriente de 5A y la distancia entre el punto A y el conductor es 3,5mm (fig.4.11), determine la intensidad del campo magnético en A.

b) Calcule la circulación del campo magnético a lo largo de la curva C_1.

c) Repita el inciso b) para la curva C_2.

4.3 Un largo conductor por el que circula una corriente de 1 A tiene un doblez en U formando un cuadrado de 10 cm de lado. El sistema puede girar libremente entre dos soportes y se encuentra en una región de campo magnético uniforme de 0,1T(fig.4.42).

a) Indique sobre la figura las fuerzas actuantes sobre el cuadro móvil suponiendo que la densidad de masa del alambre utilizado es 75 gr/m.

b) Calcule la posición que adoptará el cuadro cuando llegue al equilibrio expresándola en función de la posición inicial del mismo.

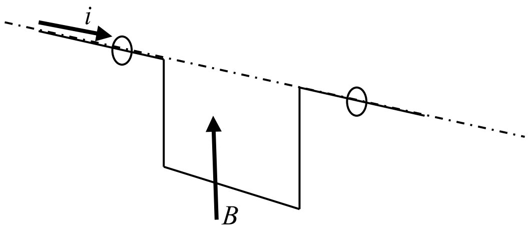


Fig.4.42

4.4 a) En fig.4.43 considere B=0,6T, i= 2A, L= 3 cm, d= 2,5 cm y x=1 cm. Calcule la fuerza magnética sobre cada lado de la espira indicando su dirección y sentido.

b) Calcule el trabajo necesario para colocar la espira totalmente en la región de campo magnético. ¿se debe realizar trabajo o entra sola?

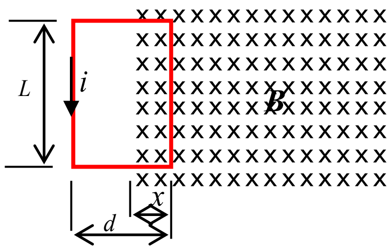


Fig.4.43

c) Cuando la espira haya ingresado totalmente a la región de campo generado por el imán, el campo magnético resultante en los puntos encerrados por la espira ¿será mayor, menor o igual al que existía antes de colocar la espira?

4.5 ¿Se modificará el resultado de 4.4b) si se invierte el sentido de la corriente? Explique.

4.6 Compre los resultados obtenidos para los problemas 4.4 y 4.5 desde el punto de vista de la conservación de la energía.

Los interrogantes que surjan serán tratados en el próximo capítulo.

4.7 En fig.4.44 la espira del ejercicio 4.4 se encuentra en la región de campo magnético originado por la corriente de 5A a través de un largo alambre recto.

Calcule la fuerza resultante sobre la espira considerando que la misma se encuentra fija en la posición indicada.

4.8 a) Para las ecs.4.24 y 4.25 con N=100, i=0,1 A y R=1 cm, calcule el campo en x=0 y x=0,5 cm.

b) Determine la variación porcentual para cada disposición.

c) Compare los valores en el centro para ambos casos.

4.9 Considere un toroide cuyo radio medio es cinco veces el radio de las espiras y una bobina recta con igual longitud y tamaño de espiras. En ambos casos el número de espiras es el mismo y suficiente para mantenerlas una junto a la otra. Compare respecto al campo en el eje del toroide, el campo que se tiene en el eje de la bobina recta para igual corriente en:

a) el centro del bobinado.

b) un extremo del mismo.

En 4.4) hay que hacer trabajo externo para que disminuya el campo mientras que en 4.5) la espira entra sola y aumenta el campo. Este resultado, ¿contradice el principio de conservación de la energía?

4.6) Para analizarlo desde el punto de vista de la conservación de la energía se debe considerar también el trabajo necesario para mantener constante el valor de la corriente por la espira (Capítulo 5)

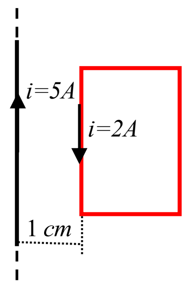


Fig.4.44

4.8) Entre otras consideraciones, la elección del circuito para establecer un campo magnético uniforme en una región determinada requiere tener en cuenta, además de la uniformidad del campo en la región, la facilidad de disponer objetos en la misma y la intensidad de corriente necesaria para generar el campo.

4.10 Se desea reemplazar una espira circular de 21 mm de diámetro por otra, cuadrada con igual momento dipolar.

a) Calcule el lado de la espira.

b) ¿Qué valor tomará el momento dipolar de la misma cuando por ella circule una corriente de 163 mA?

4.11 Considere que la espira del ejercicio anterior yace en el plano y=0 y existe un campo magnético uniforme que responde a la siguiente expresión:

$\vec{B}(x,y,z) = 0,75\ T\ \ (\breve{i}\,)$

a) Determine el flujo magnético a través de la espira.

b) Determine el par ejercido sobre la espira indicando su intensidad, eje y sentido de giro cuando por la misma circula una corriente de 4,5 A en sentido horario

4.12 a) Suponiendo que el flujo enlazado por el bobinado 2 de fig.4.23 es 50mWb cuando por el bobinado 1 circulan 10A, calcule la inductancia mutua del sistema formado por los mismos.

b) ¿Qué valor tiene el flujo enlazado por el bobinado 2 cuando la corriente por 1 es 2,7A?

c) ¿Qué valor tendrá el flujo por el bobinado 1 cuando la corriente por 2 sea de 10A?

4.13 a) Si la inductancia del bobinado 1 del ejercicio anterior es 17,2 mH y la del otro bobinado 3,1 mH, ¿qué valor tendrá el coeficiente de acoplamiento entre ambos?

b) Calcule el flujo a través del bobinado 1 cuando por el circulan 10 A.

c) Determine el valor de la corriente por el bobinado 2 que genera en 1 un flujo igual al obtenido en el inciso anterior. Realice un esquema similar al de fig.4.23 e indique el sentido de la corriente por la bobina 2 para que ambos flujos se opongan.

4.14 a) Suponiendo que el campo magnético del ejercicio 4.11 se origina en un circuito externo atravesado por una corriente de 634 mA y que la espira cuadrada de 18,6 mm de lado después de girar libremente sobre su eje alcanzó la posición de equilibrio, determine la inductancia mutua del sistema para esta posición.

b) Considerando que en determinado instante la normal a la espira forma un ángulo θ con el campo magnético 0< θ <90º, deduzca la expresión de la inductancia mutua en función de la posición de la espira.

4.15 Demuestre que la expresión de la inductancia del toroide, en función de sus radios interno y externo, fig.4.32b, responde a la siguiente expresión:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{4} \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1 + R_2}$$

4.16 Se quiere utilizar un aro circular de madera de sección circular de 4cm de radio interno y 6 cm de radio externo para construir un bobinado toroidal utilizando alambre de cobre de 0,4 mm de diámetro.

a) Determine el número máximo de espiras que podrá enrollar en el mismo sin superponerse.

b) Adoptando $2A/mm^2$ para la densidad de corriente en el alambre, calcule los Amper-espira que dispondrá para generar el campo magnético

c) Calcule el valor del campo magnético en el radio medio del toroide considerando que el material del mismo es madera.

d) Calcule la inductancia y resistencia del inductor

4.16 a) Considere que las espiras entran justamente en el largo de la cara interna del aro

c) La permeabilidad de la madera no difiere de manera apreciable de la del vacío.

En los ejercicios 4.17 a 4.22 considere que se mantienen los 157,83 Amper-espira calculados en 4.16.

4.17) Repita los incisos c) y d) del problema anterior para el caso en que se utiliza un material cuya permeabilidad es $\mu = 100\mu_0$

4.18) a) Verifique haciendo $\ell_0 \rightarrow 0$ que el campo calculado con ecs.4.40 corresponde al valor en el material sin entrehierro.

4.19 a) Utilice las ecs.4.19 y 4.40 para deducir la expresión para la inductancia de un toroide con núcleo de hierro de longitud l_h, sección transversal A_h con un entrehierro de longitud l_0 sobre el que se devanan N espiras. Considere que la longitud total es $l = l_h + l_0$ y que debido a la dispersión del flujo en el entrehierro la superficie abarcada en el entrehierro es $A_0 \geq A_h$, representada mediante la relación de dispersión $\delta = A_h / A_0 \leq 1$. Las características magnéticas del material son tenidas en cuenta en la permeabilidad relativa $\kappa = \mu / \mu_0$. Suponga que el flujo es conducido totalmente por el hierro.

b) Determine la expresión de la inductancia para el caso en que no exista entrehierro y utilícelo para comprobar el resultado del inciso a) cuando $\ell_0 \rightarrow 0$.

c) Verifique que la relación entre la inductancia con entrehierro y sin él responde a:

$$\frac{L_{eh}}{L_h} = \frac{l}{l_0}(1+\delta)\frac{1}{\kappa + (1+\delta)\left(\frac{l}{l_0} - 1\right)} \qquad \text{ecs.4.53}$$

4.20 La representación de ecs.4.53 en función del espesor del entrehierro permite comprobar la dependencia de la inductancia con el tamaño del mismo.

En fig.4.45 se puede apreciar que la dispersión aumenta con la separación entre las partes de hierro. Suponiendo que la dispersión aumenta proporcionalmente al tamaño del entrehierro se puede obtener una aproximación al comportamiento que deberá ser comprobado experimentalmente. Considerando un núcleo de hierro con permeabilidad relativa κ, sección transversal circular de diámetro $D = R/5 = R_2 - R_1$,

4.18) La realización de experiencias en las que se intercambian diferentes objetos materiales en una región de campo magnético uniforme requiere de un espacio libre para los mismos.

4.19) Para calcular la inductancia tenga en cuenta que el flujo magnético que atraviesa las espiras del bobinado de campo es el mismo que en el entrehierro (ecs.4.35).

Expresando ecs.4.19 en función del campo Bo ya calculado, de la sección transversal del núcleo, Am y porcentaje de dispersión en el entrehierro (ecs.4.34), podrá calcular la inductancia para diferentes condiciones.

4.19b) Para $l_0 = 0$, considere $\delta = 0$.

Generalmente no se consiguen inductores comerciales que reúnan todas las características requeridas para una aplicación determinada, debiéndoselo diseñar y construir artesanalmente.

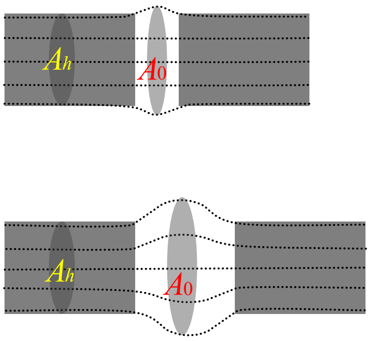


Fig.4.45

Modificando el tamaño del entrehierro, se controlan las condiciones de funcionamiento en algunas máquinas eléctricas. Es posible formarse una idea sobre la influencia del entrehierro en la inductancia y corriente por los bobinados que originan el campo magnético considerando el caso sencillo de un toroide con entrehierro.

radio medio $R=(R_1+R_2)/2$, donde R_1, R_2 son los radios interior y exterior del toroide y representando con x al espesor variable del entrehierro, la ecs.4.54 se obtuvo suponiendo que la dispersión es 20% cuando el entrehierro es igual al diámetro del núcleo.

En la columna de la derecha se indican los pasos seguidos para obtener la relación de dispersión, referidos a la ecs.4.46.

a) Verifique que la ecs.4.54 satisface ecs.4.53.

b) Grafique L_{eh}/L_h en función de la relación x/D, con $0 \le x \le D$ representando los diferentes valores del entrehierro para $\kappa = 100$.

c) Para determinar la influencia del entrehierro sobre la corriente por el bobinado utilice los resultados del inciso anterior y la definición de inductancia considerando que se mantiene el mismo flujo magnético por el núcleo para los diferentes valores del entrehierro y grafique la relación i_{eh}/i_h en función de x/D.

4.21 Repita 4.20b para $\kappa = 500$ y $\kappa = 1000$. Represente las tres curvas en una misma gráfica indicando el parámetro κ.

4.22 Repita 4.20c para $\kappa = 500$ y $\kappa = 1000$. Represente las tres curvas en una misma gráfica indicando el parámetro κ.

4.23 La bobina de un galvanómetro de imán permanente y bobina móvil con escala lineal tiene 520 espiras cuadradas de 1,5cm de lado y alambre de cobre con $0{,}05\text{mm}^2$ de sección.

a) Considerando que el campo magnético es uniforme de 0,45 T y que la aguja desvía 45° cuando la corriente es 5,48 mA, determine la constante de torsión del sistema móvil.

b) Calcule la resistencia del bobinado.

$$\frac{L_{eh}}{L_h}=\frac{1}{\left(1-0{,}0318\frac{x}{D}\right)+0{,}0079\kappa\frac{x}{D}\frac{1}{\left[0{,}0477\frac{x}{D}+0{,}5\right]^2}}$$

ecs.4.54

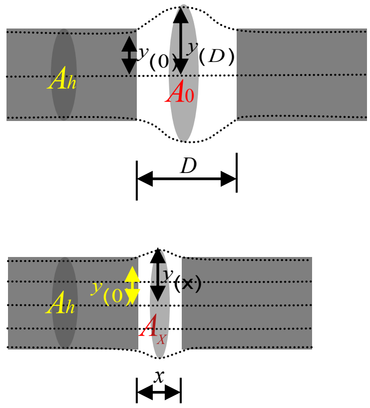


Fig.4.46

$$A_0 = 1{,}2A_h$$

$$\pi y(D)^2 = 1{,}2\pi\frac{D^2}{4} \rightarrow$$

$$\boxed{y(D)=0{,}5477D}$$

$$\frac{y(D)-D/2}{y(x)-D/2}=\frac{D}{x} \rightarrow$$

$$\boxed{y(x)=0{,}0477x+0{,}5D}$$

$$\boxed{\frac{A(x)}{A(0)}=4\left(0{,}0477\frac{x}{D}+0{,}5\right)^2}$$

4.24 Se desea construir una bobina plana con espiras de 2cm de radio para obtener, en el centro de la misma y utilizando una corriente de 0,1A, un campo magnético de 0,4mT. (ecs.4.24-fig.4.29a). Se dispone de dos rollos de alambre de cobre cuya resistividad es $1,7x10^{-8}\ \Omega/m$. El diámetro del alambre del primer rollo es 0,16mm mientras que para el segundo rollo es 0,25 mm.

a) Considerando que la densidad de corriente en el bobinado no supere 2A/mm2, indique si podrá utilizar alguno de los rollos de alambre disponibles.

b) Utilice la expresión del campo magnético en el centro de la bobina plana para determinar el número de espiras necesarias.

c) Determine la longitud de alambre necesario, la resistencia eléctrica y espesor del bobinado. ¿Es válida la suposición de bobina plana?

d) Calcule la caída de potencial originada por la corriente en el bobinado y la potencia disipada en el mismo.

4.25 El espesor resultante para el bobinado del ejercicio anterior no es despreciable frente al radio de mismo. Utilice la ecs.4.24 para calcular el campo en el centro de la bobina recta resultante y determine la variación porcentual entre el valor obtenido y el correspondiente al ejercicio anterior.

4.26 Se conecta el circuito selector de corrientes de fig.4.47 a una fuente de tensión de 5V, 200W.

a) Determine la máxima corriente que puede entregar dicha fuente según sus especificaciones.

b) Calcule el valor de las resistencias $R1, R2, R3 y R4$ para que la fuente entregue corrientes de 1, 2, 4 y 8A cerrando una llave por vez cuando se unen con un corto alambre grueso los terminales de salida. Considere $Rs = 0,1\Omega$.

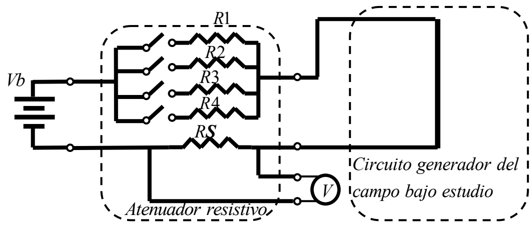


Fig.4.47

4.27 Para la realización de una práctica con campos magnéticos se unen los terminales de salida de la disposición descripta en el ejercicio anterior con un cable de cobre de $2mm^2$ de sección transversal y 2 m de longitud.

a) Determine la resistencia del cable y utilice su valor para estimar la corriente por el mismo cuando solamente están cerradas las llaves que conectan R_3 y R_4 (alcances de 4 y 8 A).

Considere despreciable la resistencia de las llaves y las de conexionado.

b) Para las condiciones del inciso anterior, ¿cuál será la diferencia de potencial en extremos de R_s ?

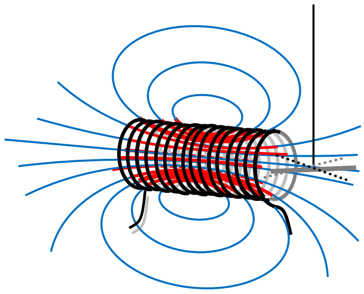


Fig.4.46

4.28 Se construye una bobina con 100 espiras de 2 cm de radio utilizando alambre de cobre de $1mm^2$.

Para conectarla al selector de corrientes del ejercicio 4.27 se utilizan dos cables similares a los utilizados en el ejercicio anterior.

a) Despreciando el valor de las resistencias de conexionado, estime la corriente que circulará por el bobinado con las cuatro llaves cerradas.

b) Considerando una densidad de corriente de 2A/mm2 para funcionamiento nominal ¿Se podrá utilizar este bobinado para realizar experiencias con la máxima corriente entregada por la fuente sin sobrepasar dicha especificación?

c) Determine cuántos valores diferentes de corriente podrá fijar para la realización de experiencias con esta disposición sin superar la densidad de corriente especificada.

Para cada caso indique las llaves que estarán activas y calcule la indicación del voltímetro conectado en paralelo con R_s .

4.29 Repita el ejercicio anterior utilizando para el bobinado alambre de 1,5mm de diámetro

4.30 a) Calcule la longitud de la bobina del ejercicio anterior.

b) Utilice la ecs.4.26 para determinar, en función de la corriente, la intensidad del campo magnético en el eje del sistema a una distancia de 2cm fuera de la bobina.

4.31 La bobina del ejercicio anterior se dispone de modo que su eje tenga la dirección N-S. A 2cm de un extremo se coloca una varilla de acero magnetizada colgada de un hilo (fig.4.46).

Haciendo circular una corriente de 1,89A se observa que la aguja realiza cinco oscilaciones completas en 9,97 s.

Invirtiendo el sentido de la corriente y manteniendo su valor, se observan cuatro oscilaciones completas en 9,88s.

a) Calcule el valor de la intensidad de campo en dicho punto originado por la corriente en la bobina.

b) Utilice el valor obtenido y restantes datos del problema para calcular la constante k de ecs.4.51

c) Calcule el valor de la componente horizontal del campo magnético terrestre en el lugar donde se realizó la medida.

CAPITULO 5

CORRIENTES VARIABLES EN EL TIEMPO

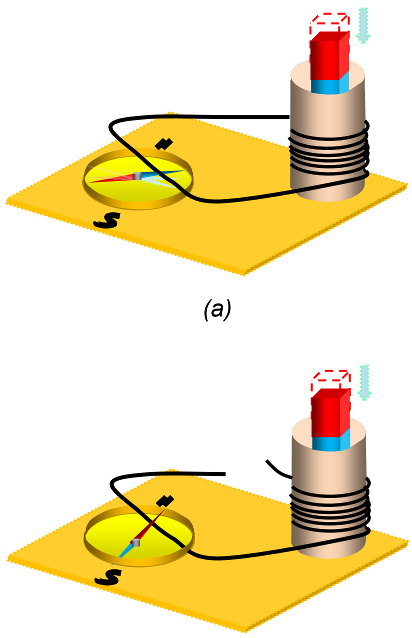
Algunos experimentos

Hasta aquí se han considerado situaciones en que las magnitudes intervinientes no cambian con el transcurso del tiempo. En electrostática, las cargas han alcanzado una posición de equilibrio en reposo y los campos eléctricos que ellas originan no dependen del tiempo. Cuando se consideraron los campos magnéticos generados por imanes fijos o por corrientes continuas, tampoco intervino el factor tiempo debido a que las cargas eléctricas en movimiento tienen velocidad promedio constante.

En este capítulo se comienza a considerar, desde el punto de vista de los circuitos eléctricos, los efectos del campo magnético generado por imanes en movimiento o por corrientes variables en el tiempo, dejando para capítulos posteriores la generación de campos eléctricos a partir de campos magnéticos variables en el tiempo.

Para tratar el efecto sobre un circuito producido por imanes en movimiento, se puede realizar una experiencia como la esquematizada en fig.5.1 en la que, sobre un tubo de cartón se enrollaron varias vueltas de alambre de cobre formando un circuito cerrado. Completa el sistema, una brújula colocada debajo del lazo y un imán.

Acercando el imán, mientras está en movimiento se observan oscilaciones de la aguja de la brújula. Cuando el imán está fijo, aún estando ubicado en el interior del tubo de cartón, la aguja apunta en una dirección fija, resultante de la contribución del campo magnético del imán y el terrestre, sin observarse oscilaciones de la misma. Similar resultado se obtiene dejando fijo el imán y desplazando la bobina. Para asegurarnos que el cambio en la orientación de la aguja no es producido por la atracción ejercida por el imán, el lazo formado debe ser suficientemente grande. En estas condiciones, si el imán se mantiene suficientemente lejos de la brújula y el lazo forma un circuito cerrado, las oscilaciones de la aguja serán originadas por el movimiento del imán (fig.5.1a). En el capítulo 4 se presentó una situación similar cuando se trató el origen de un campo magnético, pudiéndose concluir que al mover el imán circula una corriente por el circuito cerrado en el que se encuentra la bobina.



(a)

(b)

Fig.5.1

Si el circuito se interrumpe (fig.5.1b), al no circular corriente, la aguja mantendrá su posición sin enterarse del movimiento del imán. Conectando un voltímetro con muy alta resistencia interna en la interrupción, al mover el imán se observan variaciones en la indicación del instrumento aunque la aguja de la brújula se mantiene en su posición sin oscilar.

La situación es similar a la que se presentó en fig.3.3 donde la f.e.m. de la pila impulsa cargas por el circuito estableciendo una corriente por el mismo. Si el circuito está abierto se acumulan cargas en la interrupción apareciendo una diferencia de potencial entre dichos puntos igual a la f.e.m.

Análogamente, cuando el imán entra y sale de la bobina, se origina una f.e.m. en la misma.

En la experiencia presentada en Fig.5.2, el imán es remplazado por un bobinado conectado a una batería y eléctricamente aislado del que forma un lazo cerrado. El desplazamiento relativo entre el imán y el lazo cerrado se reemplaza por la conexión y desconexión de la batería.

Para detectar la circulación de corriente se utiliza un galvanómetro de cero aunque también puede utilizarse una brújula como en la experiencia anterior.

En todas estas experiencias se observa que en el intervalo de tiempo en que se produce una variación del flujo magnético en el interior de un lazo cerrado, si este es conductor de la electricidad, hay circulación de corriente.

Como se trató en el capítulo 3, para que circule una corriente continua se necesita una f.e.m. que impulse las cargas y como ocurre con una pila, circulará corriente si se unen los extremos de la pila a un conductor que además debe cerrarse formando un circuito.

Si no existe un medio conductor o si éste se interrumpe en alguna parte, no hay circulación de corriente continua aunque sigue existiendo fuerza impulsora sin entregar energía al circuito.

Fuerza electromotriz inducida

En las experiencias de las figuras 5.1 y 5.2, existe una f.e.m. que impulsa las cargas por el circuito, pudiéndose concluir que, debido a las variaciones en el tiempo del flujo magnético a través del lazo cerrado, se induce una f.e.m.

Michel Faraday en 1831 después de realizar experiencias similares a las comentadas, postuló que la variación del flujo magnético en el tiempo induce una fuerza electromotriz.

Heinrich Lenz se ocupó de relacionar el sentido de la f.e.m. inducida con las variaciones de flujo magnético considerando una situación similar a la esquematizada en la Fig.5.3, donde se muestra un anillo conductor sobre el que se coloca un imán en reposo.

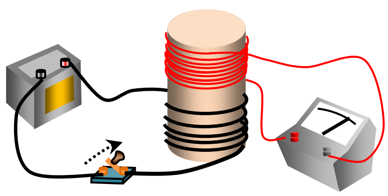


Fig.5.2

El flujo magnético a través del lazo cerrado que forma el anillo no se modifica con el transcurso del tiempo debido a que ambos están en reposo no existiendo f.e.m. inducida.

Si en determinado momento, se produce un pequeño acercamiento entre el imán y el anillo por desplazamiento de uno de ellos (fig.5.3 b y c), el flujo a través del anillo se modifica originando una f.e.m. y, por ser el anillo conductor, una corriente eléctrica. Debido a la circulación de esta corriente, se genera alrededor del anillo un campo magnético que se superpone al del imán modificando el flujo magnético resultante a través del lazo.

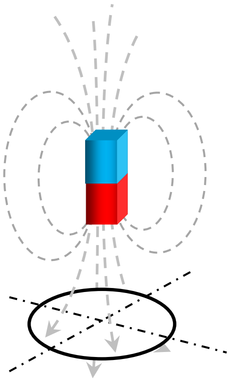
Dependiendo del sentido de circulación de la corriente inducida, el flujo generado por ella puede tener el mismo sentido que el del imán o contrario. Suponiendo que ambos flujos tienen el mismo sentido y el imán se está acercando a la espira, (fig.5.3b), se produciría un incremento de la f.e.m. inducida, de la corriente y en definitiva, del flujo a través de la espira. Como resultado, se tendría un aumento incontrolable de la corriente hasta fundir el alambre por la excesiva disipación de energía en su resistencia.

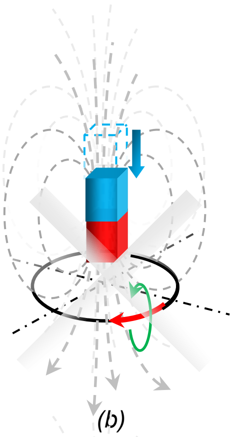
Considerando que experimentalmente no se observa este comportamiento y que un resultado como el supuesto estaría contradiciendo el principio de conservación de la energía al originar una cantidad muy grande de energía con solo un desplazamiento infinitesimal del imán, Lenz concluyó que la f.e.m. inducida se opone a la causa que la origina (fig.5.3c).

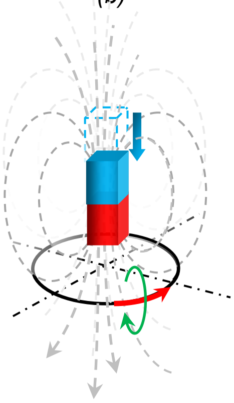
Si se aplica el resultado de la ley de Lenz al caso en que, en vez de caer, el imán sube alejándose de la espira (fig.5.3d), el flujo magnético hacia abajo a través de la espira disminuye induciéndose una f.e.m. que impulsa corriente por la espira originando un flujo magnético que se opone a dicha disminución. Como podrá comprenderse, para determinar el sentido de la f.e.m. inducida, además del sentido del campo se debe tener en cuenta si está aumentando o disminuyendo.

La expresión 5.1 relaciona la f.e.m. inducida con las variaciones de flujo magnético y recibe el nombre de ley de Faraday.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad \text{ecs.5.1}$$


(a)


(b)


(c)

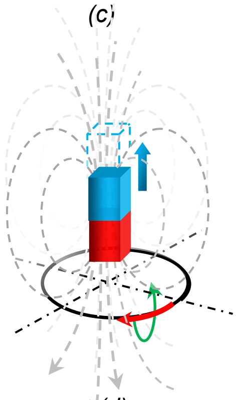

(d)

Fig.5.3

El signo menos tiene en cuenta la deducción realizada por Lenz.

Se debe tener en cuenta que la f.e.m. se induce en el lazo formado por el circuito y que el flujo magnético, a cuya variación temporal se refiere la ecs.5.1, es el flujo a través de dicho lazo o curva.

Esta f.e.m. se distribuye a lo largo de la curva cerrada, independientemente de que la misma esté formada por un medio material o no.

El campo eléctrico inducido

En el capítulo 2 se definió la f.e.m. como el trabajo por unidad de carga eléctrica realizado por un agente externo, ecs.2.3. En fig.5.1 el agente externo que realiza trabajo es la mano que mueve el imán mientras que en fig.5.2 lo realiza la fuente de tensión durante la conexión y desconexión del circuito.

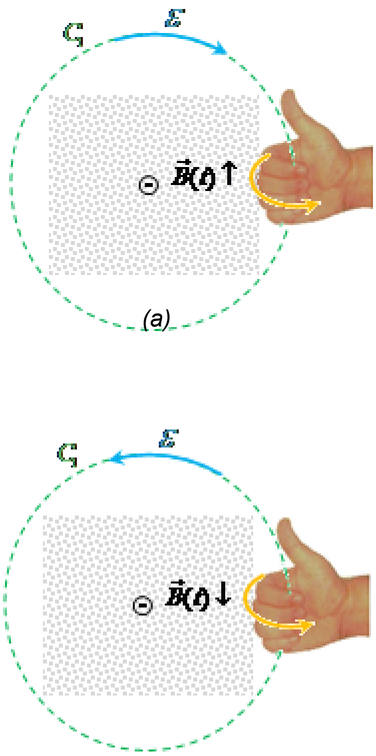
Independientemente de la manera en que se produzca la variación temporal del flujo magnético, la única forma de impulsar una carga eléctrica es por medio de un campo eléctrico. En este caso el campo no es generado por cargas fijas como el electrostático sino que es inducido. De esta manera, se puede reemplazar la fuerza por unidad de carga por un campo eléctrico relacionado con la variación de flujo magnético. Así, la expresión 5.1 se puede escribir de la siguiente manera:

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad \textit{ecs.5.2}$$

Donde la curva entre A y B de ecs.2.3 se reemplazó por una curva cerrada C que es el contorno de la superficie a través de la cual se refiere el flujo del campo magnético.de ecs.5.2.

Sentido de la f.e.m. inducida

La ecs.5.2 es análoga a la ley de Ampere, ecs.4.4, donde la corriente encerrada por la curva C es remplazada por la derivada temporal del flujo magnético.



(a)

(b)

Fig.5.4

Por este motivo, para determinar el signo de la f.e.m. inducida se aplica la regla de la mano derecha.

Se toma el lazo con el pulgar de dicha mano dispuesta de manera que los dedos apunten en dirección del campo.

Si el campo magnético está aumentando, fig.5.4a, el signo menos indica que la f.e.m. inducida tiene sentido opuesto al indicado por el pulgar. Por otra parte, si el campo disminuye, fig.5.4b, el sentido será el del pulgar, indicando que se induce una f.e.m. que, si el camino es conductor, impulsará una corriente cuyo campo magnético tendrá el mismo sentido que el campo original que está disminuyendo, oponiéndose a esta disminución.

La ley de Faraday

Esta es una de las cuatro leyes fundamentales del electromagnetismo y será tratada con más detalle en capítulos posteriores. En este capítulo y en los siguientes servirá para comprender la influencia de los campos magnéticos variables en circuitos permitiendo considerar el intercambio de energía entre campos eléctricos y magnéticos.

En los casos considerados, la curva C en la que se distribuye la f.e.m. inducida es contorno de una superficie S. La ecs.4.2 expresa el flujo del campo magnético a través de una superficie, de modo que puede reemplazarse en 5.2 para obtener la expresión integral de esta ley.

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{d\left(\iint \vec{B}.d\vec{S}\right)}{dt} \qquad \textit{ecs.5.3}$$

Influencia de la forma de la curva

Eligiendo una curva suficientemente grande para contener completamente a la superficie S en la que se produce la variación del flujo magnético, es posible comprobar experimentalmente que el resultado obtenido es independiente de la curva. Para ello, se utilizan varias vueltas de alambre aislado rodeando a un imán. El rollo deberá tener tamaño suficiente para que sea despreciable el campo magnético del imán fuera del mismo. Para medir el efecto de la f.e.m. inducida al mover el imán, se cierra el circuito con un galvanómetro.

La corriente inducida al mover el imán variará en el tiempo de acuerdo a la forma en que se mueva el imán.

Para repetir este movimiento y así poder comparar la indicación del galvanómetro para diferentes formas del mismo circuito, se puede utilizar la disposición presentada en fig.5.5 donde un tubo de vidrio dispuesto verticalmente, se llena con un líquido viscoso por el que cae el imán con velocidad límite suficiente para inducir una corriente detectable en el instrumento.

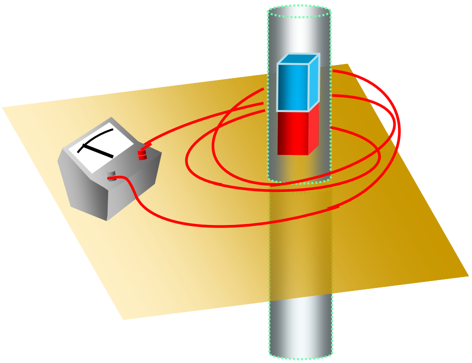


Fig.5.5

En la parte media de la trayectoria a seguir por el imán se ubica el galvanómetro junto con el cable enrollado.

Repitiendo la experiencia para diferentes formas del rollo, si este contiene completamente al campo del imán, el resultado será el mismo.

El resultado de esta experiencia, junto con la teoría de campo, permite trabajar con el concepto de fuerza electromotriz distribuida y comprobar que la existencia de una f.e.m. inducida no implica necesariamente la circulación de una corriente eléctrica. Aunque para su realización se debió elegir una curva suficientemente amplia que contenga a todo el flujo magnético variable, la ley de Faraday es válida independientemente de la forma y tamaño del contorno elegido.

En fig.5.6 se muestra un ejemplo en el que un campo uniforme B perpendicular al plano de la figura y saliente de la misma está confinado en la región con sección transversal cuadrada. El flujo a través de las curvas C1 y C2 es el mismo, independientemente de la forma y tamaño de dichas curvas. Si el campo varía en el tiempo, la f.e.m. inducida en ambos contornos será igual, aunque distribuida a lo largo de cada camino de manera diferente.

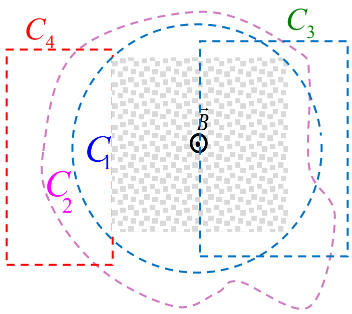


Fig.5.6

La f.e.m. inducida en el contorno C3 es la mitad de la que se tiene en los casos anteriores mientras que en el contorno C4 es nula. Para el ejemplo mostrado donde las líneas de campo magnético salen de la figura hacia el lector, si el campo magnético está aumentando en el tiempo la f.e.m. inducida tendrá sentido horario mientras que si está disminuyendo será anti-horaria.

El ejemplo presentado (fig.5.5) sirve como introducción al tema aunque resulta difícil comparar la indicación del instrumento para diferentes experiencias. La utilización de instrumental que permite visualizar y registrar la forma de señales eléctricas variables en el tiempo brinda una manera más simple de realizar esta comprobación.

Campos y circuitos

Para iniciar el estudio del electromagnetismo desde el punto de vista de los circuitos, además de los conceptos de campos eléctrico y magnético se utilizó la representación de los mismos mediante líneas, mencionando que los fundamentos teóricos correspondientes serían abordados posteriormente con ayuda de la teoría de campos.

Aunque campos y circuitos están relacionados, muchas veces suelen aparecer como temas independientes, utilizándose el modelo más adecuado para la situación que se trate de explicar.

Cuando solamente se necesita conocer las corrientes y potenciales involucrados o como se realiza el reparto de energía, los elementos distribuidos junto con resistores, inductores o capacitores se agrupan en resistencias, inductancias y capacidades concentradas formando circuitos.

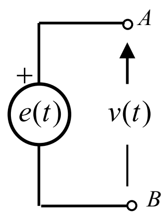
La resistencia eléctrica tiene en cuenta la disipación de energía en el material originada por la circulación de corriente eléctrica mientras que la capacidad permite relacionar la carga acumulada en las diferentes partes con la diferencia de potencial entre las mismas. De manera similar, cada tramo de circuito tiene asociada una inductancia.

Circuitos con corrientes variables en el tiempo

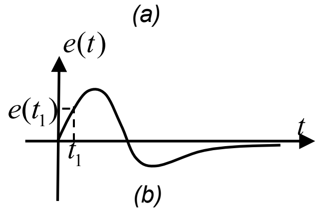
Cuando por un circuito circula una corriente eléctrica, el campo magnético originado por la misma lo atraviesa, pudiéndose relacionar el flujo magnético con la corriente que lo produce mediante la inductancia propia o auto inducción. Como sucede con la resistencia y capacidad, esta inductancia se distribuye a lo largo del circuito y puede ser utilizada para representar la f.e.m. inducida que se origina cuando la corriente se modifica con el transcurso del tiempo.

De manera similar a como sucede en circuitos de corriente continua, para impulsar una corriente variable en el tiempo se necesitará una fuente de f.e.m. que la impulse. En fig. 5.7a, se denomina e(t) a la f.e.m. de la fuente de tensión variable en el tiempo utilizada en remplazo de la pila o batería y v(t) a la diferencia de potencial o tensión disponible en bornes de la misma. Colocando un medio conductor entre estos extremos, se cierra el circuito estableciéndose una corriente i(t).

La función e(t) puede ser cualquier función continua en el tiempo impulsando las cargas hacia un lado u otro por el circuito. En la figura se indica con el signo + el terminal en que se mide el potencial tomando al otro terminal como referencia.



(a)



(b)

Fig.5.7

La función e(t) mostrada en la Fig.5.7b es creciente en algunos intervalos de tiempo y decreciente en otros, pudiendo tomar valores positivos y negativos. A modo de ejemplo, en el instante t_1 el terminal superior se encuentra a mayor potencial que el inferior siendo, la diferencia entre ambos, creciente en el tiempo.

Al cerrarse el circuito, la corriente circulante estará limitada por la resistencia del mismo y por la oposición que ofrezca el circuito al establecimiento del flujo magnético en su interior.

En fig.5.8, R representa a la resistencia del alambre de conexionado y cualquier otra resistencia intercalada en el circuito. Se indica con cruces el campo magnético cuando es entrante y con puntos cuando es saliente del plano del dibujo.

Debido a que la corriente está en aumento en el intervalo de tiempo considerado, el flujo magnético a través del lazo formado por el circuito, es entrante y en aumento.

De acuerdo a ecs.5.1 se induce una f.e.m. que se opone al aumento del flujo impulsando, para este ejemplo, una corriente en sentido anti-horario (fig.5.8c).

La f.e.m. inducida está distribuida a lo largo del lazo y de la misma manera que la resistencia del alambre, puede considerase concentrada en un componente de circuito. En fig.5.8d, $e_i\left(t_1\right)$ representa un generador de f.e.m. equivalente a la f.e.m. inducida distribuida por el lazo.

En el capítulo 4, se introdujo el concepto de autoinducción para tener en cuenta el flujo a través de un circuito originado por su propia corriente. Combinando las ecs.4.12 y 5.1, como se muestra en la Fig.5.8e, se puede reemplazar la f.e.m. inducida por una inductancia L, tal que

$$e_i(t) = -L\frac{di}{dt} \qquad \text{ecs.5.4}$$

Como se vio en el capítulo 3, la f.e.m. aplicada en un circuito origina una diferencia de potencial que se reparte en las caídas de potencial en resistencias y capacidades.

En el circuito de Fig.5.8e no existen capacitores y no se tuvo en cuenta la capacidad entre los elemento del circuito de modo que solo se considera la caída en la resistencia. En este caso, además de la f.e.m. del generador se debe tener en cuenta la auto-inducida, resultando:

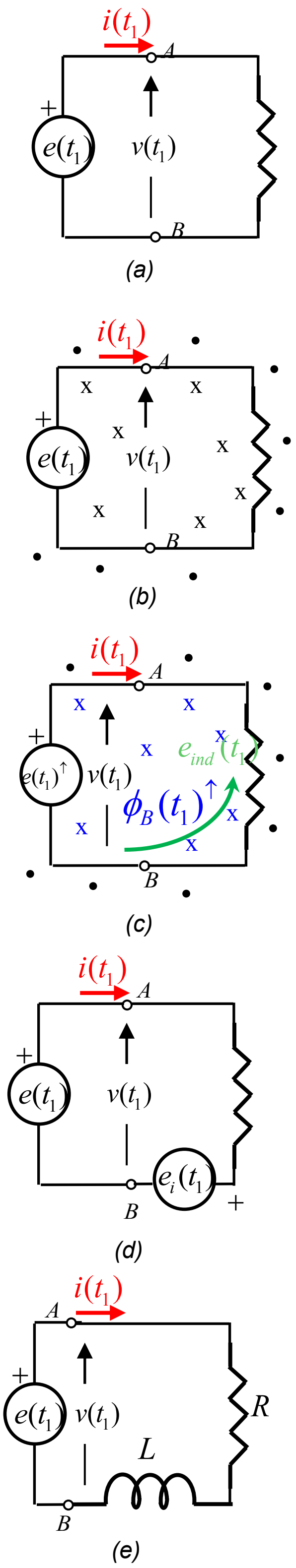


Fig.5.8

$$e(t) - L\frac{di}{dt} = i(t)R \qquad \textit{ecs.5.5}$$

En el caso más general en que además pueda existir una capacidad en serie, la ecuación del lazo que relaciona la f.e.m. aplicada por un generador externo y la corriente por el circuito, deberá contener también la caída de potencial en la misma.

$$e(t) - L\frac{di}{dt} = i(t)R + \frac{q(t)}{C} \qquad \textit{ecs.5.6}$$

En situaciones en las que existe acoplamiento magnético entre circuitos sin conexión eléctrica, el tratamiento es similar al realizado, con la incorporación del término de inductancia mutua correspondiente.

En Fig.5.9a el campo magnético generado por la corriente i_1 se indica con un punto o cruz según corresponda, encerrado en un círculo para diferenciarlo del generado por i_2. Se supone que ambos campos están aumentando.

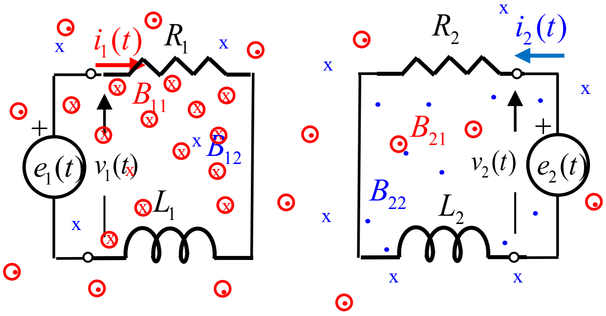
En estas condiciones, la f.e.m. inducida en el circuito 2 por efecto del flujo magnético originado por la corriente i_1, e_{21}, se opone a $e_2(t)$. Similar comportamiento presenta la f.e.m. e_{12} originada en el circuito 1 por las variaciones de la corriente i_2.

La inductancia mutua relaciona el flujo en cada circuito con la corriente circulando en el otro, de modo que, de manera similar a la autoinducción puede ser representada como se indica en la fig.5.9b.

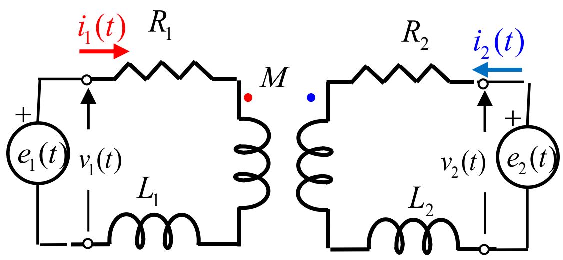
Por comparación con la ecs.5.5, para estos circuitos corresponden las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$e_1(t) - L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = i_1(t)R_1$$

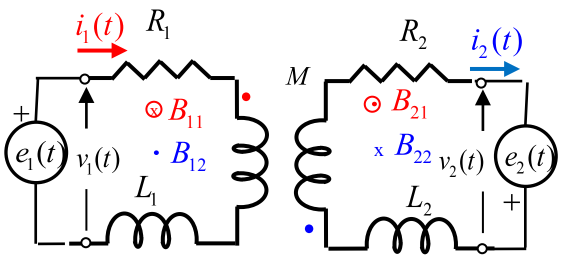
$$e_2(t) - L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = i_2(t)R_2$$



(a)



(b)



(c)

Fig.5.9

El punto en cada bobinado representativo de la inductancia mutua, indica el extremo por el que ingresa la corriente. Esta situación puede modificarse invirtiendo uno de los generadores, como se muestra en fig.5.9c donde la contribución a la f.e.m. que cada corriente realiza sobre el otro circuito tiene polaridad opuesta a la anterior.

Para considerar estas dos posibilidades, las ecuaciones anteriores se escriben de la siguiente manera:

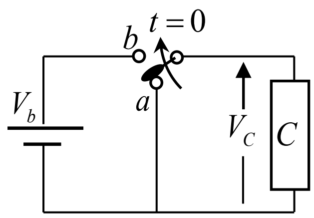
$$e_1(t) - L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} = i_1(t) R_1$$

$$e_2(t) - L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt} = i_2(t) R_2 \qquad \textit{ecs.5.7}$$

Su solución dependerá de la función $e(t)$ o excitación a que está sometido el circuito. Particularmente, será de interés conocer la manera en que evolucionan los circuitos de corriente continua ante algún cambio en ellos y los circuitos de corriente alterna en estado estacionario.

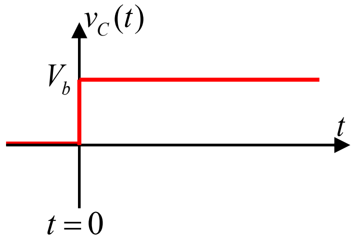
Régimen transitorio en corriente continua

La resolución de circuitos en corriente continua, tratada en el capítulo 3, se realizó considerando que la corriente por el circuito se ha establecido y no se modifica en el transcurso del tiempo, como tampoco lo hacen las f.e.ms. y caídas de potencial a lo largo del circuito. Se conoce a esta situación como estado estacionario de corriente continua, diferenciándose del régimen transitorio, correspondiente al intervalo de tiempo transcurrido desde que se produce una modificación en el circuito hasta alcanzar el nuevo estado estacionario.



(a)

La conexión y desconexión de una fuente de continua, la incorporación o eliminación de un componente en un circuito, son ejemplos de cambios producidos en el intervalo transcurrido entre dos estados estacionarios diferentes.



(b)

Fig.5.10

En Fig.5.10a se conecta el circuito C a la batería conmutando la llave desde la posición a hacia b, indicándose con t=0 al instante inicial del cronometraje. La Fig.5.10b muestra la variación temporal de la tensión V_C aplicada al circuito.

Circuitos RL

En fig.5.11 se muestra un circuito formado por una resistencia y una inductancia en serie que en el instante t=0 se conectan a una fuente de tensión V_b. La función $e(t)$ responde a la siguiente expresión:

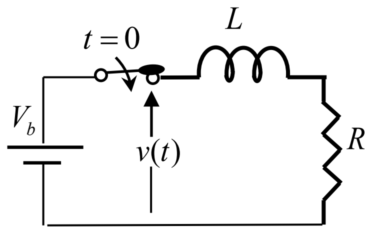


Fig.5.11

$$e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_b & t \geq 0 \end{cases}$$ *ecs.5.8*

Estando cerrada la llave, para t>0 la ecuación del circuito, ecs.5.5, resulta:

$$V_b = i(t)R + L\frac{di}{dt}$$ *ecs.5.9*

De ser posible, es conveniente determinar la corriente para alguna situación particular. Este resultado servirá de comprobación cuando se resuelva la ecuación diferencial del circuito.

Dado que se trata de un circuito alimentado con una f.e.m. continua, finalizado el transitorio las magnitudes intervinientes no presentarán variaciones en el tiempo de modo que la f.e.m. inducida se anula una vez alcanzado el estado estacionario.

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t\to\infty} = 0 \to e_i(\infty) = 0$$ *ecs.5.10*

Reemplazando en ecs.5.9 se tiene,

$$i(\infty) = \frac{V_b}{R}$$ *ecs.5.11*

El resultado obtenido suponiendo que debe transcurrir un intervalo de tiempo infinitamente largo para que se estabilicen las variables intervinientes, ecs.5.11, no es otra cosa que la solución obtenida aplicando la ley de Ohm para el circuito en estado estacionario de continua.

Antes de la conexión de la batería, la corriente por la inductancia es nula, no existiendo campo magnético en su interior.

Debido a que en estado estacionario se llega a una corriente dada por ecs.5.11, habrá una variación de la corriente y del campo magnético que origina, desde cero hasta el valor de estado estacionario. Por este motivo, existe una f.e.m. inducida en la bobina durante este intervalo de tiempo.

Aunque no se mencionó, cada circuito considerado en el capítulo 3 forma un lazo y por tanto posee una autoinducción.

Los resultados experimentales y cálculos realizados en esa oportunidad corresponden al estado estacionario de continua, sin mencionarse que sucede inmediatamente después de alimentar al circuito conectándolo a una batería.

Es posible hallar el valor de la corriente por el circuito en el instante inmediatamente posterior a la conmutación del interruptor, reescribiendo ecs.5.9 de la siguiente manera:

$$L\frac{di}{dt} = V_b - i(t)R \qquad \textit{ecs.5.12}$$

La corriente $i(t)$ varía entre cero y el valor de estado estacionario, de modo que el segundo miembro de esta expresión tiene un valor acotado. Llamando $A_{máx}$ al máximo valor posible de este término, se puede deducir la corriente por el circuito inmediatamente después de conectar la batería.

$$L\frac{di}{dt} \le A_{máx} \rightarrow di = A_{máx}dt$$

$$\int_{t^-}^{t^+} di = \int_{t^-}^{t^+} A_{máx}dt$$

La integral del segundo miembro representa el área encerrada por un rectángulo de altura acotada, $A_{máx}$ y base tendiendo a cero, por este motivo se anula.

$$i(t^+) - i(t^-) = 0$$

$$i_L(t^+) = i_L(t^-) \qquad \textit{ecs.5.13}$$

La resolución de la ecuación diferencial permite, además de comprobar las conclusiones indicadas por las expresiones 5.10 y 5.13, obtener la variación temporal de la corriente por el circuito.

Aplicando la sustitución

$$u(t) = V_b - i(t)R \qquad \textit{ecs.5.14}$$

Resulta

$$i(t) = \frac{V_b}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \textit{ecs.5.16}$$

La ecs.5.16 indica cómo es la función que representa a la corriente por el circuito de fig.5.11.

Como la función exponencial toma un valor inferior a un milésimo cuando el exponente es -7, se puede considerar que el intervalo de tiempo, desde que se conectó la fuente de tensión, es infinitamente grande cuando:

$$\frac{R}{L}t \ge 7 \rightarrow t \ge \frac{L}{R} \quad (s) \qquad \textit{ecs.5.17}$$

$$i_L(t^+) = i_L(t^-)$$

Este resultado es válido para cualquier instante de tiempo, pudiéndose concluir que la corriente por una inductancia no se puede modificar en un intervalo nulo de tiempo.

El subíndice L indica que es la corriente a través de la inductancia la que no puede presentar cambios bruscos mientras que t+ y t- son los instantes inmediatamente antes y después de un tiempo t cualquiera.

$$\frac{du(t)}{dt} = -R\frac{di(t)}{dt}$$

$$-\frac{L}{R}\frac{du}{dt} = u(t)$$

$$\frac{du}{u(t)} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{u(t)} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt$$

$$\ln(u(t)) - \ln(u(0)) = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln\left(\frac{u(t)}{u(0)}\right) = -\frac{R}{L}t \qquad \textit{ecs.5.15}$$

$$\frac{u(t)}{u(0)} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{V_b - i(t)R}{V_b - i(0)R} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

De ecs.5.4 se puede comprobar que la unidad de inductancia, Henry, equivale a Ω.s, de modo que L/R indica un tiempo y se denomina constante de tiempo del circuito RL, pudiéndose considerar de acuerdo a ecs.5.17, que se alcanza el estado estacionario después de transcurridas siete constantes de tiempo.

En el circuito de fig.5.11, es nula la corriente por la inductancia antes de conectar la fuente, pudiéndose reescribir ecs.5.16 de la siguiente manera:

$$i(t) = \frac{V_b}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \;, \quad i(0)=0 \qquad \textit{ecs.5.18}$$

Puede comprobarse que la ecs.5.16 coincide con ecs.5.13 en el instante en que se cierra la llave. Además, cumple con la condición expresada por ecs.5.11 cuando el intervalo de tiempo transcurrido desde que se cerró la llave es muy grande, t→∞.

Las expresiones 5.19 y 5.20 corresponden a las diferencias de potencial en extremos de la resistencia y de la inductancia.

$$v_R(t) = i(t)R = V_b\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad \textit{ecs.5.19}$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = V_b e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \textit{ecs.5.20}$$

Una regla práctica considera que se alcanza el estado estacionario luego de transcurridas diez constantes de tiempo.

La ecs.5.20 representa la tensión en terminales de la inductancia; es la que se mide con un voltímetro cuyo sistema móvil es impulsado por la f.e.m. de ecs-5-4.

En la fig.5.12 se muestra la variación temporal de las magnitudes intervinientes en donde se puede comprobar que la constante de tiempo corresponde al tiempo en que se llegaría al valor de estado estacionario con la velocidad de crecimiento inicial.

Considerando ecs.5.18,

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{V_b}{L} = tg(\alpha)$$

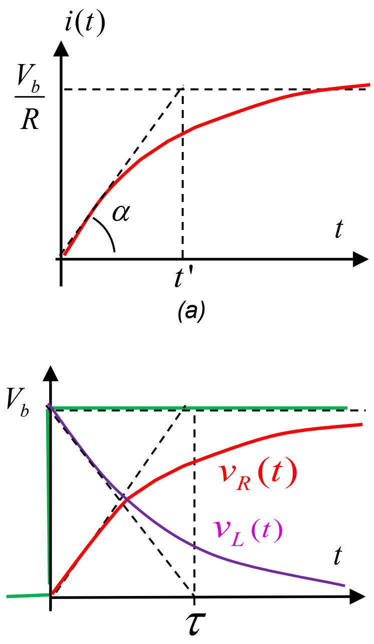
De fig.5.12a,

$$tg(\alpha) = \frac{V_b/R}{t'}$$

Resultando,

$$t' = \frac{L}{R} = \tau$$

Este resultado conduce al método utilizado para realizar la representación gráfica en fig.5.12, permitiendo realizar la comparación de la respuesta en circuitos con diferentes constantes de tiempo.



(b)

Fig.5.12

Descarga de un circuito RL

Se entiende por descarga del circuito al intervalo de tiempo transcurrido desde que se desconecta la fuente de alimentación hasta que se alcanza un nuevo estado estacionario.

La ecs.5.13 indica que la corriente por la inductancia no puede sufrir cambios bruscos, de modo que en el instante posterior a la apertura del interruptor será igual a la alcanzada en el estado estacionario anterior, ecs.5.11.

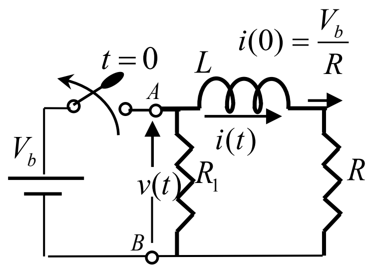


Fig.5.13

Debido a que al abrir la llave se interrumpe el circuito, en fig.5.13 se agrega un segundo resistor para evitar que se interrumpa bruscamente la circulación de corriente. Una vez encontrada la expresión de la corriente en la inductancia, para determinar el comportamiento del circuito original, se hará tender a infinito el valor de este resistor. A los efectos de realizar una comparación, este agregado no modifica la corriente por el inductor durante el transitorio de carga. Comenzando a medir el tiempo a partir de la apertura de la llave, el valor de la corriente en el instante inmediatamente anterior corresponde el valor del estado estacionario anterior.

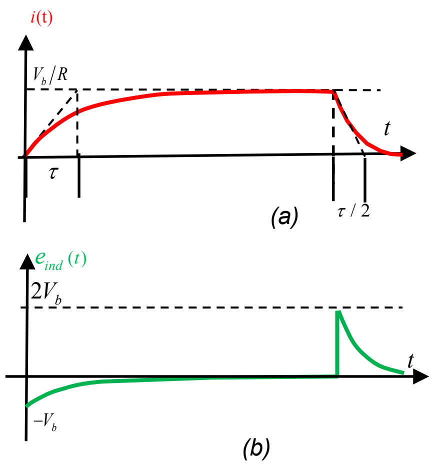


Fig.5.14

$$i(0^-)=\frac{V_b}{R} \qquad \textit{ecs.5.21}$$

Al abrir la llave, el campo magnético en la inductancia comenzará a disminuir originando una f.e.m. que se opone a tal disminución y es la única f.e.m. en el lazo.

$$-L\frac{di}{dt}=i(t)(R+R_1) \qquad \textit{ecs.5.22}$$

Siendo su solución

$$i(t)=\frac{V_b}{R}e^{-\frac{(R+R_1)}{L}t} \qquad \textit{ecs.5.23}$$

La f.e.m. inducida está dada por

$$e_{ind}(t)=\left(\frac{R+R_1}{R}\right)V_b e^{-\frac{(R+R_1)}{L}t}$$

En fig.5.14 se muestran los transitorios de carga y descarga para el caso en que las dos resistencias son de igual valor resultando, para esta condición, la constante de tiempo en la descarga igual a la mitad del valor correspondiente en el transitorio de carga.

Se debe observar que la diferencia de potencial entre los puntos A y B, además de cambiar de signo toma un valor mayor a V_b cuando $R_1 > R$.

$$v(t) = -i(t)R_1 = -\frac{R_1}{R}V_b e^{-\frac{(R+R_1)}{L}t} \qquad ecs.5.24$$

En el transitorio de carga, esta diferencia de potencial es igual a V_b por estar conectada directamente a la batería, siendo la corriente por R_1 igual a V_b/R_1.

En una inductancia:	
Ante modificaciones:	$i_L(t^+) = i_L(t^-)$
En estado estaciona-	$e_L(\infty) = 0$

Tabla 5.1

Régimen transitorio de continua en circuitos RL

Resolución de los estados inicial y final

Cuando el circuito consta de varios lazos, las reglas de Kirchhoff establecen que se deben plantear N ecuaciones de malla y M-1 ecuaciones de nodo considerando que N es el número de mallas independientes y M el de nodos.

Muchas veces, sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales resultante, es posible encontrar el valor de las magnitudes intervinientes inmediatamente después de producida una modificación en el circuito o en estado estacionario. Este método, además de ser de utilidad para la verificación de los resultados obtenidos mediante el uso de otras herramientas de cálculo, puede ser utilizado para el diseño de circuitos por permitir la determinación de las corrientes máximas y sobretensiones en los componentes intervinientes.

El mismo se basa en el procedimiento y resultados obtenidos en la deducción de las expresiones 5.10 y 5.13, que puede resumirse de la siguiente manera:

_En estado estacionario de corriente continua, la f.e.m. inducida en una inductancia es nula.

_La corriente a través de la inductancia no puede modificarse en un intervalo de tiempo nulo.

Ejercicio 5.1:

Considerando que el circuito de la Fig.5.15 se encuentra en estado estacionario,

En el caso de no existir R1, como ocurre en Fig.5 11, no circula corriente por la misma. La no existencia de esta resistencia es equivalente a considerar que tiene un valor infinitamente grande.

En estas condiciones la diferencia de potencial entre los punto A y B, inmediatamente después de la apertura del interruptor, ecs.5.24, también es infinitamente grande pudiéndose considerar que es la que existe en bornes de la llave que ha sido abierta. Una situación como la presentada origina campos eléctricos extremadamente intensos provocando una descarga eléctrica o chispa entre los contactos del interruptor, principalmente cuando la corriente de estado estacionario tiene valores elevados (fig.2.37b).

a) Calcule la corriente por la inductancia y utilice el resultado para determinar la f.e.m. inducida inmediatamente después de cerrada la llave.

b) ¿Cuál será la corriente por la inductancia una vez alcanzado el nuevo estado estacionario?

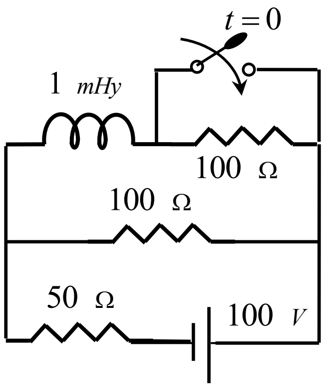


Fig.5.15

$R_1 = 50\ \Omega,\ R_2 = 100\ \Omega,\ R_3 = 100,\ L = 1\ mHy,\ V_b = 100\ V$

Solución:

Se identifican los componentes indicándose con letras los nodos del circuito.

a) Inicialmente el circuito se encuentra con la llave abierta, habiendo finalizado el transitorio de conexión de la fuente de tensión. Vamos a denominarlo estado estacionario inicial, (fig.5.16), para diferenciarlo del que se alcanza cuando la llave permanece cerrada, inciso b) del ejercicio.

Como $e_{ind}(\infty) = 0$, los extremos de la inductancia estarán a igual potencial no interviniendo en la resolución del circuito (fig.5.16a). Por este motivo, se resuelve el paralelo entre los resistores R_2 y R_3 (Fig.5.16b).

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 50\ \Omega$$

La corriente entregada por la fuente se obtiene resolviendo el único lazo del circuito:

$$i(\infty) = \frac{V_b}{R_1 + R_{23}} = 1\ A$$

La caída de potencial en R_{23} permite conocer la diferencia de potencial entre los puntos A y B. En este caso se comprueba fácilmente que el potencial de A es mayor que el de B debido a la caída de potencial en la resistencia.

En casos más complicados se debe elegir un camino que se cierre a través de los puntos cuya diferencia de potencial se desea conocer y resolver la ecuación de malla correspondiente. El lazo debe incluir a la línea de trazos terminada en una flecha dirigida hacia el punto que suponemos a mayor potencial.

En fig.5.16c, eligiendo el lazo I la ecuación de mala resulta:

$$(V_A - V_B) - i(\infty)R_{23} = 0$$

$$(V_A - V_B) = i(\infty)R_{23} = +50V$$

Si se elige el camino II, la misma ecuación será:

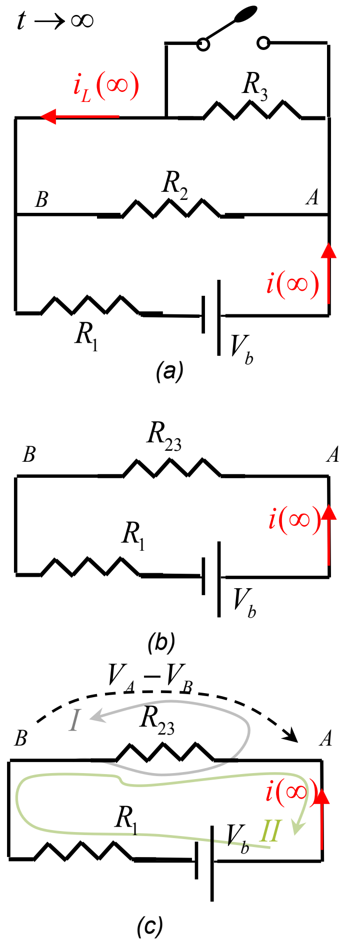


Fig.5.16

$$-V_b = -i(\infty)R_1 - (V_A - V_B)$$

$$(V_A - V_B) = -i(\infty)R_1 + V_b = -50 + 100 = +50V$$

La corriente por el inductor, fig.5.16a, es:

$$i_L(\infty) = \frac{(V_A - V_B)}{R_3} = 0,5 \ \ A$$

Este valor se mantiene hasta el instante en que se cierra la llave (fig.5.17).

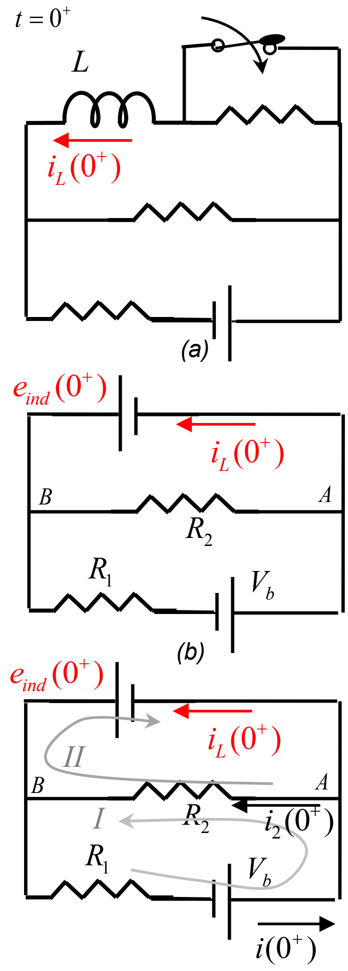


Fig.5.17

Al producirse una modificación en el circuito, como es en este caso el cierre de una llave, la corriente por la inductancia no cambia bruscamente debido a la f.e.m. inducida que se opone a las variaciones de flujo magnético. Por este motivo, la corriente por la inductancia inmediatamente después de cerrar la llave es la misma que existía antes de cerrarla, en el estado estacionario anterior al cambio en el circuito.

$$i_L(0^+) = i_L(\infty)\big|_{anterior} = 0,5 \ \ A$$

A partir del cierre de la llave inicia un nuevo régimen transitorio que finalizará en un nuevo estado estacionario cuando desaparezca la f.e.m. inducida en la inductancia.

El sentido de dicha f.e.m. será siempre de oposición al cambio en la corriente por la inductancia. Si el valor que tomará dicha corriente en el estado estacionario final es mayor que el que tiene en el instante inicial del transitorio, el sentido de la f.e.m. será contrario al de $i_L(0^+)$ oponiéndose a su aumento. Contrariamente, si el valor de estado estacionario es menor que el inicial, el sentido de la f.e.m. será el de la corriente inicial por la inductancia.

Independientemente del resultado final, existe una f.e.m. cuyo valor inicial y sentido queremos determinar.

Para esto reemplazamos en el circuito equivalente para $t = 0^+$, el valor de $e_{ind}(0^+)$ por una fuente de tensión continua a la que le asignamos un sentido (fig.5.17b). El resultado que se obtenga al resolver el circuito (fig.5.17c), permitirá determinar el valor de la f.e.m. inducida inmediatamente después del cambio. Si el valor obtenido tiene signo negativo simplemente significará que el sentido de la f.e.m. es opuesto al asignado.

Debido a que la resolución del régimen transitorio involucra ecuaciones diferenciales, la resolución directa del sistema de ecuaciones resultante no es simple cuando el circuito está formado por varias mallas. Afortunadamente, existen potentes herramientas matemáticas que simplifican este tratamiento permitiendo obtener la respuesta de un circuito no solo a la forma de excitación presentada en este capítulo, denominada respuesta al escalón, sino a excitaciones con diferentes funciones continuas en el tiempo.

$I)\quad V_b = i_2(0^+)R_2 + i(0^+)R_1$

$II)\quad -e_{ind}(0^+) = -i_L(0^+).0 + i_2(0^+)R_2$

$A)\quad i(0^+) = i_L(0^+) + i_2(0^+)$

Un inductor real además de inductancia tiene resistencia, que en este ejemplo no se consideró. El término $i_L(0^+).0$ en II) se agregó para indicar esta situación.

b) Para determinar la corriente una vez alcanzado el nuevo estacionario, se resuelve el circuito equivalente correspondiente (fig.5.18).

El mismo se obtiene considerando que, además de no existir diferencia de potencial entre los extremos de la inductancia, en el ejemplo considerado se desprecian las resistencias de la llave y del inductor. El paralelo entre esta resistencia nula y cualquier otra resistencia sigue siendo cero por este motivo en fig.5.18b no aparece R_2 resultando $i_L(\infty) = 2\ A$

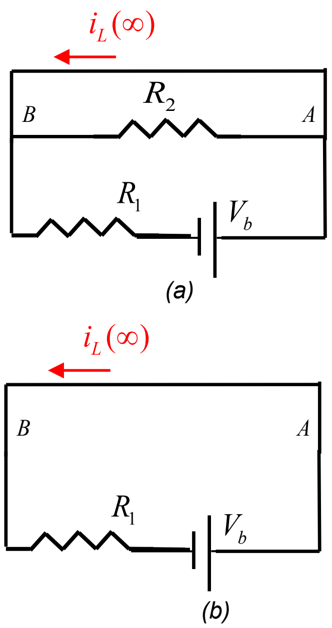


Fig.5.18

Antes de cerrar la llave la corriente es de 0,5A hacia la derecha y finalizado el transitorio de 2A en igual sentido. Como la corriente aumenta, la f.e.m. inducida se opone al aumento de la misma de modo que $e(0^+)$ tiene sentido opuesto a $i_L(0^-)$. Como supusimos el mismo sentido que el de la corriente, el valor que obtengamos para la f.e.m. tendrá que ser negativo.

Rta: a) $i_L(0^+) = 0{,}5\ A$, $e_{ind}(0^+) = -50\ V$

. b) $i_L(\infty) = 2\ A$

Energía almacenada en un campo magnético

Al analizar la descarga de un circuito RL se comprobó la existencia de corriente eléctrica por el circuito que no está conectado a una fuente de energía externa.

La energía disipada en las resistencias del circuito durante el transitorio de descarga se puede calcular de la siguiente manera:

Durante el transitorio de descarga, la circulación de corriente origina una caída de tensión en la parte resistiva del circuito. En este caso, la energía disipada se obtiene de la f.e.m. inducida de modo que es válido considerar que se almacenó energía en el campo magnético y que esta energía es devuelta al medio durante la descarga.

$$dU = p(t)dt \qquad \text{ecs.5.25}$$

$$U = \int_0^\infty i(t)^2 (R + R_1)dt \qquad \text{ecs.5.26}$$

Reemplazando en ecs.5.26 el valor de la corriente, ecs.5.23, se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_b}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} L I^2 \qquad \text{ecs.5.27}$$

La ecs.5.27, donde se indica con I a la corriente correspondiente al estado estacionario en carga, expresa la energía disipada en el circuito durante el transitorio de descarga

El campo magnético originado, que mantuvo constante su valor mientras estuvo conectada la batería, comienza a desvanecerse al interrumpir el circuito generando una f.e.m. que, en ausencia de la fuente de tensión, impulsa a los portadores de carga por el circuito.

La existencia de determinada cantidad de energía asociada con el campo magnético en una región del espacio, implica la necesidad de realizar trabajo para establecerlo. Por este motivo, para comprender el mecanismo por el que se entrega energía en forma de campo magnético a una región del espacio, es necesario examinar el transitorio de carga desde el punto de vista energético.

El trabajo que debe realizar la batería durante la carga, para desplazar una carga dq venciendo la oposición de la f.e.m. inducida:

$$dW = -e_{ind}(t)dq = -e_{ind}(t)i(t)dt \qquad \text{ecs.5.28}$$

El signo menos indica que es el trabajo realizado contra la f.e.m. De ecs.5.4

$$-e_{ind}(t)dt = Ldi \qquad \text{ecs.5.29}$$

Reemplazando en ecs.5.28,

$$dW = Li(t)di$$

El trabajo que debe realizar la batería en contra del la f.e.m. inducida en la inductancia hasta establecer el campo magnético estacionario resulta:

$$W = \int_0^\infty Li(t)di = \frac{1}{2} LI^2(\infty) - \frac{1}{2} LI^2(0) \qquad \text{ecs.5.30}$$

Como sucede con el campo eléctrico, un campo magnético tiene asociada energía, obtenida durante el establecimiento del mismo aunque para mantenerlo es necesario mantener la circulación de corriente y por tanto una fuente de energía externa que la impulse.

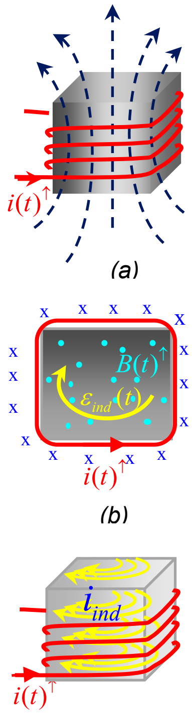
Cuando el campo magnético es producido por un imán, la energía se almacenó en el imán en el momento de su formación y permanece retenida en el campo que lo rodea. Aunque este caso requiere un tratamiento desde el punto de vista de la mecánica cuántica, el campo resultante cuando el imán está fijo, igual que el originado por una corriente continua en estado estacionario, solamente origina fuerzas sobre cargas eléctricas en movimiento. Debido a que estas fuerzas son normales a la trayectoria seguida por las cargas en movimiento, el campo magnético estático no modifica la energía cinética de una carga eléctrica.

Uno de los inconvenientes relacionados con la utilización de imanes es que no es posible controlar la magnitud del campo, por este motivo en muchas máquinas eléctricas los campos magnéticos son originados por corrientes circulando por bobinados.

El trabajo realizado por la fuente durante el transitorio incrementa la energía en el campo magnético en una cantidad dada por ecs.5.27. Si la corriente inicial por el circuito es nula, la ecs.5.30 coincide con ecs.5.27, pudiéndose concluir que el trabajo realizado por la fuente de tensión contra la f.e.m. en la inductancia para establecer el campo magnético se almacena en dicho campo, permanece en él durante el estado estacionario y se disipa totalmente en las resistencias cuando desaparece el campo magnético.

En un instante t cualquiera, el campo magnético B(t) generado por una corriente i(t) implica la existencia de una cantidad de energía distribuida en la región donde existe el campo que se puede expresar por

$$U_B(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \qquad \text{ecs.5.31}$$



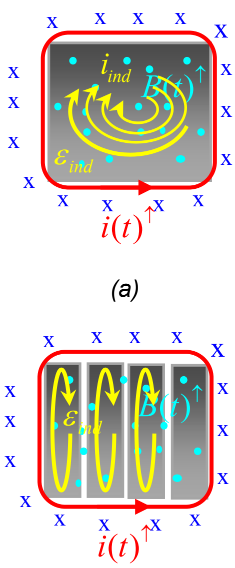
(a)
(b)
(c)
Fig.5.19

Corrientes parásitas

Los materiales ferro-magnéticos utilizados para concentrar las líneas de campo magnético, son conductores eléctricos. Por este motivo, las f.e.ms inducidas originan corrientes por el material con la correspondiente disipación de energía.

A modo de ejemplo se considera una bobina enrollada sobre un núcleo macizo de hierro (fig.5.19a). Mirando desde arriba la corriente circula en sentido anti-horario (fig.5.19b) y si está aumentando, $i(t)\uparrow$, la f.e.m. inducida resultará en sentido horario. Por tratarse de un material conductor de la electricidad, circulará una corriente inducida, i_{ind}, en el sentido de la f.e.m. (fig.5.19c)

Como la f.e.m. inducida y los remolinos de corriente yacen en planos perpendiculares a la dirección del flujo magnético (fig.5.20a), es posible disminuir la intensidad de las corrientes inducidas en el hierro aumentando la longitud del camino que recorren y disminuyendo la superficie normal al mismo. Para ello se corta el metal en láminas paralelas a la dirección del flujo (fig.5.20b). La capa de óxido que se forma sobre las láminas metálicas provee la aislación eléctrica entre las mismas.

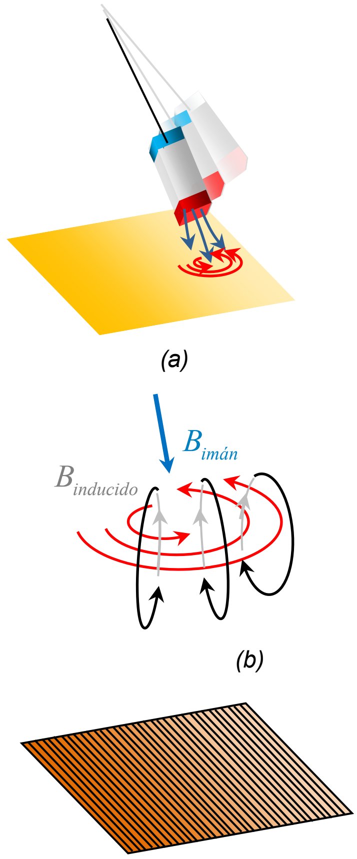


(a)
(b)
Fig.5.20

Cuando se trata del núcleo de una máquina rotante, los cortes se realizan perpendicularmente al eje de rotación.

Las corrientes parásitas, también conocidas como corrientes de Foucault constituyen la base de funcionamiento del freno magnético. Una manera de comprobarlo experimentalmente se logra colgando un imán con uno de los polos hacia abajo. Haciéndolo oscilar se observa que la amplitud de la oscilación se reduce notablemente si debajo se coloca una lámina de cobre (fig.5.21). A medida que el imán se acerca a la placa, aumenta el flujo magnético (entrante en este caso) que la atraviesa. La f.e.m. inducida en el cobre genera remolinos de corriente que a su vez generan un campo magnético inducido (B_{ind} en fig.5.21b), que se opone al campo del imán. De esta manera la placa equivale a un imán que se opone al que está cayendo, frenándolo.

Marcando líneas paralelas hasta eliminar totalmente el cobre, en una placa para circuitos impresos con cobre en una sola de sus caras, se comprueba notable disminución en el frenado del péndulo respecto al observado con el cobre sin rayar.



(c)

Fig.5.21

Comprobación de la ley de Faraday

Experiencias como las presentadas en fig.5.1 y fig.5.2 ocurren en intervalos de tiempo muy pequeños requiriéndose instrumental adecuado para medir tanto la variación de flujo como el valor de la f.e.m. inducida.

Al principio de este capítulo se mostraron situaciones que permitieron argumentar la aparición de una f.e.m. originada en una variación temporal del flujo magnético. La relación entre la f.e.m. inducida y la variación de flujo que la produce, según ecs.5.1 es directa, aunque podría no serlo, por ejemplo que alguna de estas magnitudes estuviese elevada a un exponente, tal vez cercano a la unidad pero no exactamente la unidad. Para comprobar que realmente se cumple dicha expresión es necesario en principio recurrir a la comprobación experimental.

Consideremos una resistencia con sus extremos unidos formando un circuito en una región de campo magnético producido por un imán fijo. Al desplazar la espira se modifica el flujo que la atraviesa induciéndose una f.e.m. Por tratarse de un circuito cerrado, circulará una corriente:

$$i = \frac{\varepsilon_{ind}}{R}$$

Considerando un valor de R suficientemente grande para que el campo magnético generado por esta corriente no modifique de manera apreciable el campo estático original, la cantidad de carga puesta en movimiento durante un intervalo de tiempo Δt cualquiera será:

$$\Delta q = i\Delta t = \frac{\varepsilon_{ind}}{R}\Delta t \qquad \text{ecs.5.32}$$

Suponiendo que es válida la ecs.5.1,

$$\varepsilon_{ind}\Delta t = \Delta\phi \qquad \text{ecs.5.33}$$

Reemplazando en ecs.5.32

$$\Delta q = \frac{\Delta\phi}{R} \qquad \text{ecs.5.34}$$

La carga total puesta en movimiento desde que comenzó a acercarse el circuito hasta una posición cercana al imán será:

$$\int_0^q dq = \frac{1}{R}\int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \qquad \text{ecs.5.35}$$

Trayéndolo desde muy lejos, la cantidad neta de carga moviéndose en un sentido resultará proporcional al flujo que atraviesa al circuito en la posición final.

$$q = \frac{\phi_f}{R} \qquad \text{ecs.5.36}$$

Esta expresión establece las bases para la determinación experimental. Ubicando una espira en una región de campo magnético, para que se cumpla la ecs.5.1 la cantidad de carga neta desplazada en el mismo sentido debe ser directamente proporcional al flujo en esa posición.

En lugar de acercar la espira al imán se puede generar el campo haciendo circular corriente continua por un bobinado adicional (primario) sobre el que se enrolla sin tener contacto eléctrico, la bobina con sus extremos unidos sobre la que se medirá la cantidad de carga puesta en movimiento al interrumpir la corriente por el primario (fig.5.22).

Aunque la magnitud de una f.e.m. inducida puede determinarse con un voltímetro, los instrumentos cuya descripción se realizó en los capítulos anteriores no son útiles cuando las magnitudes varían rápidamente en el tiempo.

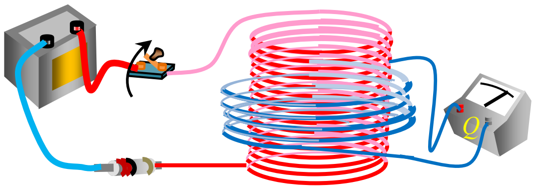


Fig.5.22

Esta comprobación experimental se realizó mucho tiempo antes de que surgieran instrumentos que permiten visualizar y medir magnitudes eléctricas variables en el tiempo, algunos de los cuales utilizaremos a partir del siguiente capítulo. Repitiendo esta experiencia para diferentes valores de la corriente primaria, se puede comprobar que la relación entre el flujo antes de interrumpir el circuito y la cantidad de carga que se movió en el mismo sentido en el secundario, es constante. Su realización requiere un instrumento que permita medir cantidad de carga. Las primeras comprobaciones se realizaron utilizando un galvanómetro balístico. Actualmente la determinación es posible con instrumentos cuyo principio de funcionamiento está fuera del alcance de este libro.

La ley de Faraday en las máquinas eléctricas

Por intermedio del campo magnético es posible realizar trabajo mecánico a partir de energía eléctrica y recíprocamente, mediante la realización de un trabajo mecánico obtener energía eléctrica. Debido a la importancia del tema para la ingeniería en general, el principio de funcionamiento de estas máquinas permitirá mostrar algunas aplicaciones de los temas hasta aquí tratados.

Además de las relacionadas con ondas electromagnéticas, tratadas en la segunda parte del libro, existen innumerables aplicaciones prácticas basadas en la ley de Faraday. Entre ellas, el transformador es una de las que más influencia tuvo en la vida moderna al posibilitar la transmisión de grandes cantidades de energía desde lugares remotos hasta los centros urbanos poniéndola a disposición de los usuarios.

Transformadores

Un transformador es un dispositivo formado por dos bobinas acopladas magnéticamente y aisladas eléctricamente. Para un buen funcionamiento se optimiza el acoplamiento magnético compartiendo el mismo núcleo de material ferromagnético (Fig.5.23a). En fig.5.23.b se muestra el símbolo representativo de un transformador.

Denominando con la letra ϕ al flujo magnético a través del núcleo de hierro, cada espira del primario será atravesada por el mismo, resultando la f.e.m. inducida:

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \qquad \textit{ecs.5.37}$$

Para un acoplamiento perfecto (k=1 en ecs.4.17), el flujo atraviesa completamente a cada espira del secundario de N2 espiras, resultando la f.e.m. inducida en el mismo:

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} \qquad \textit{ecs.5.38}$$

Dividiendo estas dos expresiones se obtiene la relación de transformación:

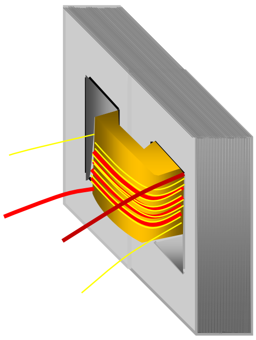
$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \textit{ecs.5.39}$$

Considerando despreciable la resistencia del bobinado primario, la tensión $v_1(t)$ aplicada es igual a $\varepsilon_{ind}(t)$.

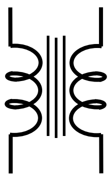
$$v_1(t) - N_1 \frac{d\phi}{dt} = 0 \qquad \textit{ecs.5.40}$$

Si el secundario se encuentra a circuito abierto, la tensión disponible en los terminales del secundario será:

$$v_2(t) = \pm N_2 \frac{d\phi}{dt} \qquad \textit{ecs.5.41}$$



(a)



(b)

Fig.5.23

Resultando

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \textit{ecs.5.42}$$

El signo ± en ecs.5.41 se utiliza para indicar la orientación relativa entre bobinados.

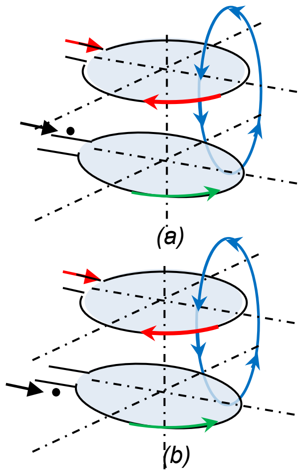
Se denomina "primario" a aquel por el que se hace circular corriente impulsada por una fuente de energía externa mientras que el otro recibe el nombre de "secundario".

Cuando primario tiene mayor cantidad de espiras que el secundario, la tensión de salida aumenta mientras que se reducirá si es menor. Conectando una carga al circuito secundario, la corriente que circula modifica el flujo por el núcleo. El tratamiento de un transformador con carga está fuera del alcance de este libro pero puede anticiparse que en el caso más favorable, la potencia entregada al primario es transferida totalmente al secundario.

$$v_1(t)i_1(t) = v_2(t)i_2(t) \qquad \textit{ecs.5.43}$$

De ecs.5.42 se tiene,

$$N_1 i_1 = N_2 i_2 \qquad \textit{ecs.5.44}$$



(a)

(b)

Fi g.5.24

En fig.5.25 se representa la conexión de una tensión alterna al primario de un transformador.

$$v_1(t) = V_1 sen(\omega t)$$

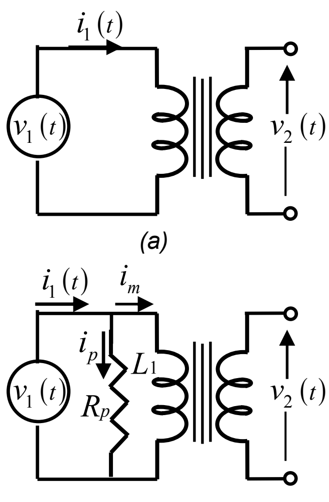
Denominando con L_1 a la inductancia del primario y considerando muy baja la resistencia del mismo, es posible calcular la corriente por este bobinado resolviendo la ecuación del lazo formado.

$$V_1 sen(\omega t) = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1}\int V_1 sen(\omega t)dt = -\frac{V_1}{\omega L_1}\cos(\omega t)$$

Las pérdidas por histéresis se minimizan eligiendo el material del núcleo con ciclo de histéresis angosto.

Esta corriente, al circular por la inductancia origina el campo magnético en el material del núcleo y se denomina corriente de magnetización, i_m, para diferenciarla de aquella que se utiliza para representar a las pérdidas de energía en el material, designada en la fig.5.25b con i_p .



(b)

FIg.5.25

Considerando muy pequeña la resistencia óhmica del primario, las pérdidas por corrientes inducidas en el hierro y por histéresis actúan de manera equivalente a una resistencia adicional. Como las mismas dependen del flujo magnético en el material, y este es el mismo independientemente del circuito magnético (ecs.5.40), estas pérdidas son tenidas en cuenta en la resistencia en paralelo con la inductancia.

Considerando que el circuito magnético formado por el núcleo del transformador es de sección transversal A_h uniforme, longitud ℓ_h y permeabilidad μ, el flujo magnético en el material será:

$$\phi_1(t) = \frac{1}{N_1}\int v_1(t)dt = -\frac{V_1}{\omega N_1}\cos(\omega t) \qquad \textit{ecs.5.45}$$

El mismo es conducido por el circuito magnético atravesando las N_2 espiras del secundario, resultando el flujo enlazado en el mismo:

$$\phi_2(t) = -N_2\frac{V_1}{\omega N_1}\cos(\omega t)$$

Y la f.e.m. inducida en el secundario:

$$\varepsilon_2(t) = -\frac{d\phi_2(t)}{dt} = -\frac{N_2}{N_1}V_1 sen(\omega t)$$

Para el secundario a circuito abierto, la tensión de salida coincide con la f.e.m. inducida:

$$v_2(t) = \frac{N_2}{N_1}V_1 sen(\omega t) = V_2 sen(\omega t + \pi)$$

La existencia de un entrehierro no modifica el flujo, (ecs.5.45) ni la tensión en el secundario, pero aumenta la corriente de magnetización debido al aumento de de la reluctancia del circuito magnético (ecs.4.39).

El flujo generado es proporcional a la corriente por el bobinado (ecs.4.39).

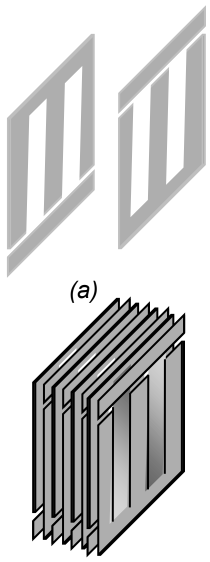
La f.e.m. inducida es proporcional a la derivada del mismo con signo cambiado.

$$e_{ind_1}(t) = -N_1\frac{d\phi}{dt}$$

Despreciando la resistencia del primario, la tensión aplicada por el generador, $v_1(t)$ es igual y opuesta a la f.e.m. inducida

$$v_1(t) - N_1\frac{d\phi}{dt} = i_1R_1 = 0$$

$$v_1(t) = -e_{ind_1}(t)$$



(a)

(b)

Fig.5.26

Las corrientes inducidas en el núcleo, se reducen construyendo el núcleo apilando láminas de forma adecuada para alojar los bobinados. La capa de óxido que se forma sobre las mismas provee la aislación eléctrica entre chapas reduciendo la disipación de energía por este efecto.

Motor eléctrico elemental

El motor eléctrico más simple consta de dos largos rieles conductores paralelos separados entre sí por una distancia ℓ, ubicados en una región de campo magnético uniforme B normal al plano que los contiene.

Los rieles, de resistencia eléctrica despreciable, están conectados a una fuente de tensión V_b.

El circuito se completa con una varilla conductora de resistencia R que puede deslizar sobre los rieles (fig.5.27).

Considerando que la varilla de masa m se encuentra inicialmente en reposo y designando con μ_e al coeficiente de rozamiento estático, la misma comenzará a moverse cuando la fuerza magnética originada por la circulación de corriente supere a la de rozamiento.

$$F_{mag} \geq F_{roz} = \mu_e mg \qquad \text{ecs.5.46}$$

Donde F_{roz} es la fuerza debida al rozamiento antes que comience a moverse la varilla. En estas condiciones, la resistencia R es la única oposición ofrecida a la circulación de corriente.

La varilla comenzará a moverse si se cumple

$$V_b \geq \frac{\mu_e mgR}{Bl}$$

La ecuación de movimiento de la varilla será:

$$Bli(t) - F_{roz} = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{ecs.5.47}$$

Sin necesidad de resolver esta ecuación diferencial, puede obtenerse la velocidad límite de la varilla o de estado estacionario (ecs.5.49).

La potencia entregada a la varilla resulta;

$$F_{roz}v(t) = \frac{V_b}{Bl}F_{roz} - \left(\frac{R}{(Bl)^2}\right)(F_{roz})^2 \qquad \text{ecs.5.50}$$

Expresando la fuerza de rozamiento en función de la corriente de estado estacionario se puede comprobar que la energía para mover la varilla es provista por la fuente de tensión.

$$F_{roz}v_{lim} = V_b i(\infty) - (i(\infty))^2 R \qquad \text{ecs.5.51}$$

F_{roz} es proporcional al peso de la varilla y a cualquier carga adicional sobre la misma cuyo desplazamiento requiera cierta cantidad de energía.

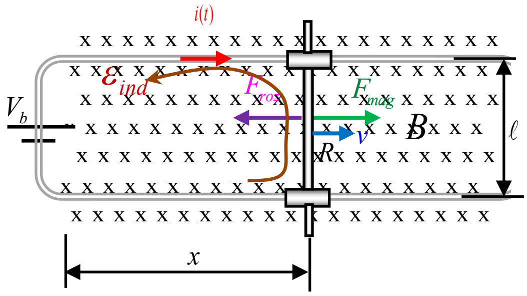


Fig.5.27

En estado estacionario:

$$i(\infty) = \frac{F_{roz}}{Bl} \qquad \text{ecs.5.48}$$

Estando la varilla en movimiento se origina una f.e.m. que se opone al aumento del flujo magnético:

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell\frac{dx}{dt}$$

Resultando la corriente en función dl tiempo:

$$i(t) = \frac{V_b - Blv(t)}{R}$$

Expresión también es válida una vez que se alcanzó la velocidad de estado estacionario.

Igualando con ecs.5.48 se obtiene la velocidad límite:

$$v(t) = \frac{V_b}{Bl} - \left(\frac{R}{(Bl)^2}\right)F_{roz} \qquad \text{ecs.5.49}$$

Aunque el campo magnético no realiza trabajo sobre las cargas eléctricas, su existencia es necesaria para la conversión de energía eléctrica en mecánica.

Generador eléctrico elemental

En este caso se reemplaza la fuente de tensión por una resistencia R_C y la varilla de resistencia R se mueve con velocidad constante impulsada por una fuerza externa (fig.5.28). Debido al incremento del flujo de campo magnético entrante al desplazar la varilla en el sentido indicado, la f.e.m. inducida y la corriente resultante tienen sentido antihorario.

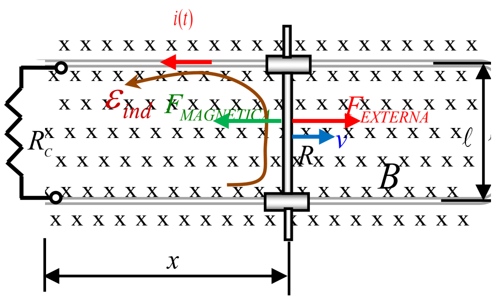


Fig.5.28

$$\left| \varepsilon(x) \right| = \frac{d(Blx)}{dt} = Blv \qquad \textit{ecs.5.52}$$

Si la velocidad es constante,

$$\vec{F}_{mag} + \vec{F}_{ext} = 0$$

$$\vec{F}_{ext} = B\ell i(t) \quad (\breve{i}) \qquad \textit{ecs.5.53}$$

La potencia entregada es

$$P_{ext} = F_{ext} v = iB\ell v$$

De ecs.5.52,

$$P_{ext} = i\ \varepsilon \qquad \textit{ecs.5.54}$$

De esta manera se comprueba que, en ausencia de rozamiento, la energía mecánica entregada se convierte en energía eléctrica que en este caso se disipa en R_C y R.

Desplazando la varilla con velocidad constante, de manera similar a como ocurre en una pila, la f.e.m. inducida no se modifica con el transcurso del tiempo.

Desconectando la resistencia de carga (Rc→∞), la corriente entregada es nula y la diferencia de potencial en bornes del generador es igual a la f.e.m.

Generador elemental de alterna

Haciendo girar una espira en un campo magnético uniforme con velocidad angular ω mediante la aplicación de un par motor τ_{ext} (fig.5.29), es posible generar una f.e.m. que varía sinusoidalmente en el tiempo.

Denominando ωt al ángulo de giro de la espira desde el instante en que la normal a la misma coincide con la dirección del campo uniformemente distribuido en la región, el flujo a través de la espira de ancho d y largo ℓ, será:

$$\phi(t) = B\ell d sen(\omega t) \qquad \textit{ecs.5.55}$$

Para el instante considerado en fig.5.29a, el flujo magnético está aumentando de modo que se inducirá una f.e.m. que se opone a dicho aumento.

$$\left|\varepsilon(t)\right| = \left|B\ell d\omega\cos(\omega t)\right| \qquad \textit{ecs.5.56}$$

En este caso se calcula el valor absoluto de la f.e.m. inducida determinándose el sentido de la misma mediante la regla de la mano derecha.

La f.e.m. inducida en sentido horario impulsará cargas acumulándolas en los extremos en los que se ubican anillos conductores sobre los que rozan carbones permitiendo unir eléctricamente la bobina móvil con el circuito externo.

Cuando los extremos del generador están libres, como ocurre con una pila a circuito abierto, la acumulación de cargas establece una diferencia de potencial v(t).

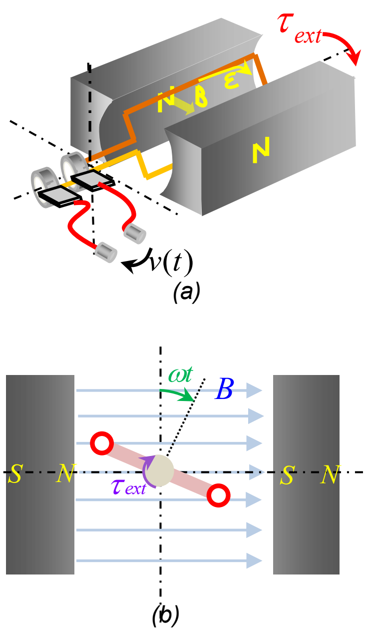


Fig.5.29

$$v(t) = BA\omega cos(\omega t) = V_{máx} cos(\omega t) \qquad ecs.5.57$$

De esta manera a medida que transcurre el tiempo, la tensión entregada por el generador varía sinusoidalmente.

Se denomina corriente alterna a este tipo de variación y es ampliamente utilizada por los sistemas de distribución de energía eléctrica.

En fig5.30.a se cierra el circuito conectando una resistencia R en extremos del generador.La corriente por el circuito impulsada por la f.e.m. inducida también tendrá sentido horario.

$$i(t) = \frac{V_{máx}}{R} cos(\omega t) = I_{máx} cos(\omega t) \qquad ecs.5.58$$

Siendo

$$I_{máx} = \frac{\omega AB}{R} \qquad ecs.5.59$$

En la vista frontal de fig5.30b, la cruz en el círculo superior indica que la corriente es entrante al plano de la figura mientras que el punto en el círculo inferior representa la punta de la flecha saliendo del dibujo.

Como se trató en el capítulo 4, el momento dipolar magnético de la espira apunta en la dirección indicada en la figura y el par ejercido por la corriente que circula por la espira sumergida en el campo magnético tendrá sentido anti-horario siendo su valor

$$\tau_{mag} = i(t)AB\ sen\ (90 + \omega t) = \frac{\omega A^2 B^2}{R} \cos^2(\omega t) \qquad antihorario \qquad ecs.5.60$$

El par necesario para mantener el giro deberá ser igual al anterior con sentido contrario.

$$\tau_{mecánico} = \frac{\omega A^2 B^2}{R} \cos^2(\omega t) \quad horario \qquad ecs.5.61$$

En estas condiciones, la potencia necesaria para hacer girar a la espira será:

$$P_{mec} = \tau_{mec}\,\omega = \frac{\omega^2 A^2 B^2}{R} \cos^2(\omega t) \qquad ecs.5.62$$

La potencia disipada en el circuito de resistencia R es

$$P_R = i^2(t)R = \frac{\omega^2 A^2 B^2}{R} \cos^2(\omega t) \qquad ecs.5.63$$

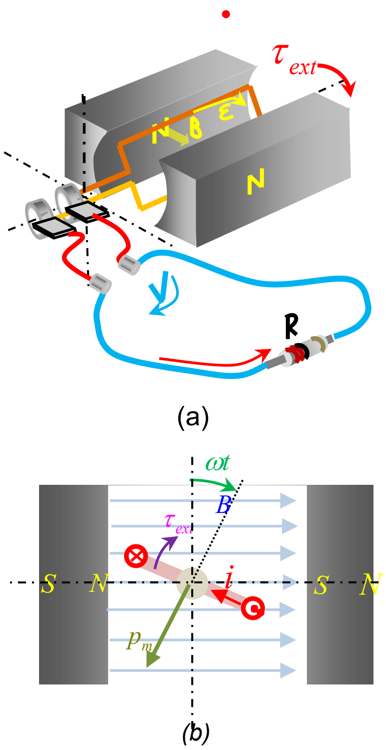


Fig.5.30

Si no se tienen en cuenta las pérdidas por fricción, el trabajo realizado para mover la espira se convierte totalmente en energía eléctrica.

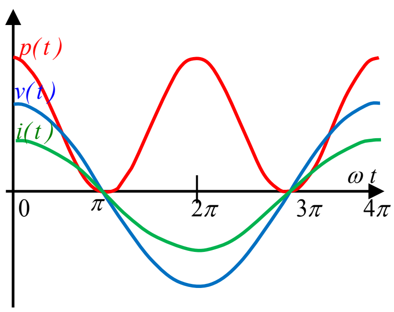


Fig.5.31

Generador de corriente continua

A partir de la divulgación de la pila voltaica muchos comenzaron a experimentar con corrientes fluyendo en un mismo sentido (corrientes directas) y de estas, las que su valor se mantiene constante con el transcurso del tiempo (corrientes continuas). Por este motivo, las diferentes aplicaciones que fueron apareciendo se diseñaron para este tipo de excitación. Habiéndose comprobado que es posible obtener energía eléctrica de manera económica basándose en la ley de inducción de Faraday, los esfuerzos iniciales en este sentido se focalizaron en obtener por este medio, corrientes directas.

Desconectando la batería y haciendo girar la espira del dispositivo de fig.4.40 se obtiene una f.e.m. pulsante en bornes del conmutador, similar a la de la fig.5.32 donde la amplitud varía entre cero y un máximo, dos veces por ciclo.

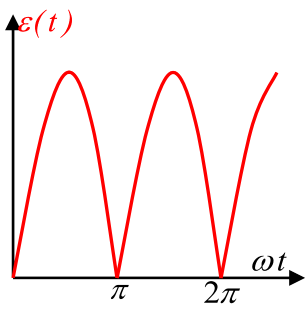


Fig.5.32

En 1871 Gramme diseñó una máquina que permitía generar una f.e.m. prácticamente constante.

La misma consta de un toroide o anillo de hierro sobre el que se devana una bobina de alambre de cobre aislado cerrada sobre sí misma que gira entre los polos de un imán en el sentido indicado en fig.5.33. Las líneas de campo son conducidas a través de las espiras del bobinado por el circuito magnético formado con el anillo.

Las espiras que en determinado instante ocupan la posición del eje vertical de simetría son atravesadas por la totalidad de las líneas de modo que el flujo magnético a través de ellas es máximo.

Contrariamente, el flujo a través de las espiras cuya posición corresponde al eje horizontal, es nulo.

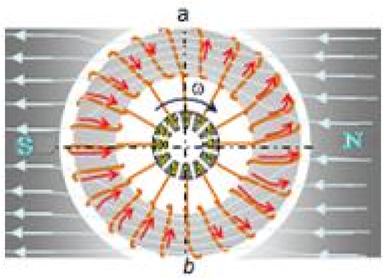
De esta manera, al rotar el conjunto, el flujo a través de cada espira pasará de un máximo hasta anularse para volver a aumentar.

La f.e.m. inducida en cada espira es nula cuando ocupa la posición vertical debido a que no existe variación del flujo magnético en esa posición y máxima cuando pasa por el eje horizontal. El sentido de la f.e.m. inducida puede determinarse aplicando la regla de la mano derecha. En el cuadrante superior derecho el flujo entrante en cada espira disminuye a medida que gira la rueda induciéndose un f.e.m. que trata de mantenerlo.

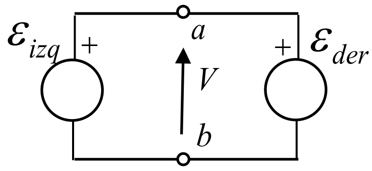
En el ejemplo considerado, en el que el campo magnético es producido por un imán permanente, el generador recibe en nombre de magneto. Cuando el campo es producido por un electroimán conectado a una corriente continua, se denomina dínamo. En algunos casos la corriente de excitación del electroimán se obtiene de una fuente independiente aunque generalmente se utiliza la misma tensión generada para producir el campo magnético.

Por otra parte, en el cuadrante inferior derecho la f.e.m. inducida tiende a mantener el valor del flujo entrante que está aumentando.

Como resultado, la f.e.m. inducida en cada espira del lado derecho, para el caso considerado en la figura, es variable en el tiempo, actuando todas en el mismo sentido. Lo mismo ocurre con la contribución de las espiras del lado izquierdo aunque actúan en sentido contrario. En fig.5.33b se muestra el circuito equivalente pudiéndose comprobar que la corriente por los bobinados es nula aunque existe una tensión entre los puntos a y b. Conectando estos puntos a un circuito exterior de resistencia R, circulará una corriente por la misma de igual forma a la que se tendría utilizando dos pilas idénticas en oposición.



(a)



(b)

Fig.5.33

El contacto con el exterior no se realiza directamente sobre las espiras. Cada grupo de espiras (bobina) se conecta a una lámina metálica (delga, fig.5.33a) colocada sobre el eje y aislada eléctricamente del mismo.

El conjunto (12 en el dibujo), recibe el nombre de colector denominándose escobillas al soporte donde se alojan los carbones utilizados para unir la parte móvil con los puntos fijos externos.

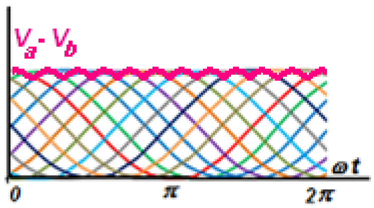


Fig.5.34

En ausencia de carga externa, el sistema de tracción debe aportar la energía necesaria para mantener al sistema en movimiento. Cuando el generador entrega corriente al circuito externo, la corriente atraviesa también a las bobinas del generador interactuando con el campo magnético. El trabajo adicional para vencer esta interacción, de manera similar a la presentada en ecs.5.54, se entrega al circuito externo en forma de energía eléctrica.

Aunque, como se esquematiza en fig.5.33a, el campo no es homogéneo, en forma aproximada puede suponerse que la f.e.m. inducida en cada mitad varía sinusoidalmente (ejercicios 5.17 a 5.21).

Como los extremos a y b son fijos, cuando el anillo avanza, en este caso la doceava parte de un giro completo, vuelve a repetirse la situación anterior.

Cuanto mayor sea el número de bobinas distribuidas por el anillo menor será la ondulación de la tensión resultante entre los terminales aproximándose a una tensión continua (fig.5.34).

Generador de alterna

Mediante el anillo de fig.5.33 también se puede generar una corriente alterna. En este caso se reemplaza el colector de delgas por dos anillos colocados en el eje y aislados de él sobre los que hacen contacto las escobillas (fig.5.35a).

En fig.5.35b, c y d se muestra el circuito equivalente representando la f.e.m. inducida en cada espira para posiciones sucesivas a medida que transcurre el tiempo. Las f.e.ms ε_i corresponden a los diferentes bobinados.

Para la posición correspondiente a fig.5.3b, se tiene:

$$\varepsilon_{izquierda} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 \qquad \textit{ecs.5.64}$$

$$\varepsilon_{derecha} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{10} + \varepsilon_9 + \varepsilon_8 + \varepsilon_7$$

$$V_a - V_b = \varepsilon_{izquierda} = \varepsilon_{derecha}$$

Para las siguientes posiciones:

$$V_a - V_b = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_1$$

$$V_a - V_b = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$V_a - V_b = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0$$

Finalizando el semiciclo positivo.

Procediendo de igual forma, hasta completar la vuelta se puede comprender que la tensión entre los anillos describe un ciclo completo alternando entre un máximo positivo y un máximo negativo.

En este caso el generador recibe el nombre de alternador.

En 1873 Hefner-Altennek devanó las bobinas sobre un núcleo cilíndrico o tambor mejorando la eficiencia del diseño anterior.

Otra manera de conseguir una alternancia entre valores positivos y negativos de la f.e.m. generada se logra haciendo girar un imán y manteniendo fijo al bobinado sobre el que se induce la misma. El funcionamiento de este tipo de generadores se puede comprender considerando la varilla deslizante de fig.5.28.

También puede obtenerse una f.e.m. inducida dejando fijo el alambre y moviendo el imán o electroimán que produce el campo.

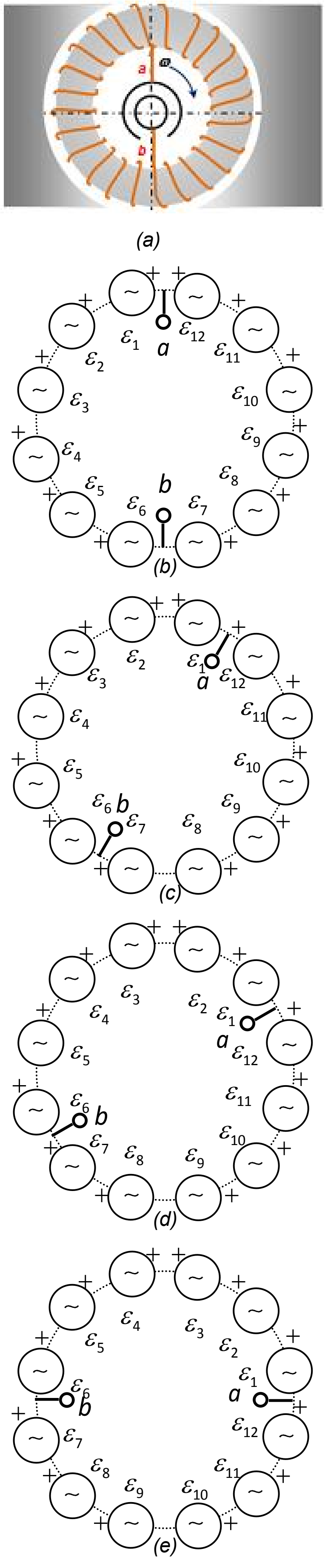


Fig.5.35

En fig.5.36 se muestra un generador de alterna basado en este principio.

En la parte móvil denominada rotor, se ubican los bobinados alimentados con corriente continua a través de un sistema de anillos y escobillas. Las corrientes por estos bobinados originan el campo magnético que gira sobre los alambres fijos en el estator. En el capítulo 7 se considera otra manera de generar un campo magnético rotante.

Por tratarse de una vista frontal, en la figura los círculos representan los extremos de dichos alambres, conectados en serie.

En línea de trazos se indica una línea de campo magnético para el instante correspondiente a la posición dibujada.

En fig.5.36b se esquematiza la distribución de los alambres en el estator. La tensión v(t) a la salida del estator es la suma de la f.e.m. inducida en los alambres.

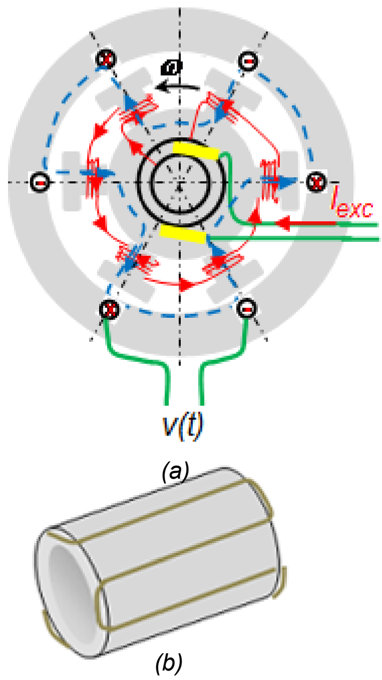


Fig.5.36

Oscilaciones de una espira en un campo magnético

Para el tratamiento del instrumento de imán permanente y bobina móvil se consideró al sistema en equilibrio sin considerar el transitorio previo al mismo.

Dejando en libertad al sistema móvil de estos instrumentos, después de apartarlo de su posición de equilibrio, la manera cómo recupera nuevamente dicha posición depende de varios factores. El conocimiento de la respuesta libre del sistema móvil contribuyó al diseño y perfeccionamiento de estos instrumentos para las diferentes aplicaciones a las que serían destinados. Una de estas aplicaciones es la medida de carga eléctrica. Por este motivo, consideraremos nuevamente al sistema móvil de fig.4.38 teniendo en cuenta la f.e.m. inducida en su bobinado.

Debido a que todo instrumento se utiliza conectado a un circuito, consideraremos que los extremos del bobinado están cerrados, denominando con la letra R a la resistencia del mismo y eventualmente del resto de circuito del cual forma parte. También consideraremos que el campo magnético en la región en que se desplaza el cuadro móvil, es uniforme.

En el capítulo 4 consideramos las oscilaciones de una aguja magnetizada en un campo magnético uniforme (ecs. 4.43). Sistemas a los que se les puede asociar un momento dipolar, como el dipolo eléctrico y una espira con corriente, responden de manera similar cuando se los coloca en un campo, eléctrico o magnético según el caso.

En la columna izquierda de fig.5.37 se esquematiza una secuencia de eventos relacionados con el movimiento de la espira apartada momentáneamente de su posición de equilibrio, agregándose a la derecha de cada esquema la vista superior correspondiente. En ésta, se representa con dos pequeños círculos, identificados con 1 y 2, a la intersección de los lados verticales de la espira con el plano del dibujo, utilizándose un punto o una cruz según corresponda, para representar la corriente que se dirige hacia el observador o se aleja del mismo.

La línea llena que une dichos círculos representa el lado superior de la espira, indicándose con una flecha el sentido de la corriente por la misma.

En fig.5.37a se muestra a la espira en su posición de equilibrio de la que se aparta por aplicación de un par externo τ (fig.5.37b).

Al soltar la espira, debido a la cinta de torsión comenzará a girar hacia la posición de equilibrio, disminuyendo el flujo que la atraviesa. Se indica con φ al ángulo entre el plano de la espira y el campo y con línea de trazos la proyección del vector campo magnético sobre la normal al plano de la espira, pudiéndose observar que la misma disminuye hasta anularse cuando la espira recupera la posición de equilibrio.

$$\phi = BA\cos(90° - \varphi) = BAsen(\varphi) \quad \textit{ecs.5.65}$$

La f.e.m. inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -BA\cos(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} \qquad \textit{ecs.5.66}$$

Resultando la corriente impulsada por el circuito de resistencia R,

$$i = \frac{BA}{R}\cos(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} \qquad \textit{ecs.5.67}$$

Con el sentido indicado en fig.5.37d, el par originado por dicha corriente es:

$$\tau_m = iABsen(90° - \varphi) = iAB\cos(\varphi)$$

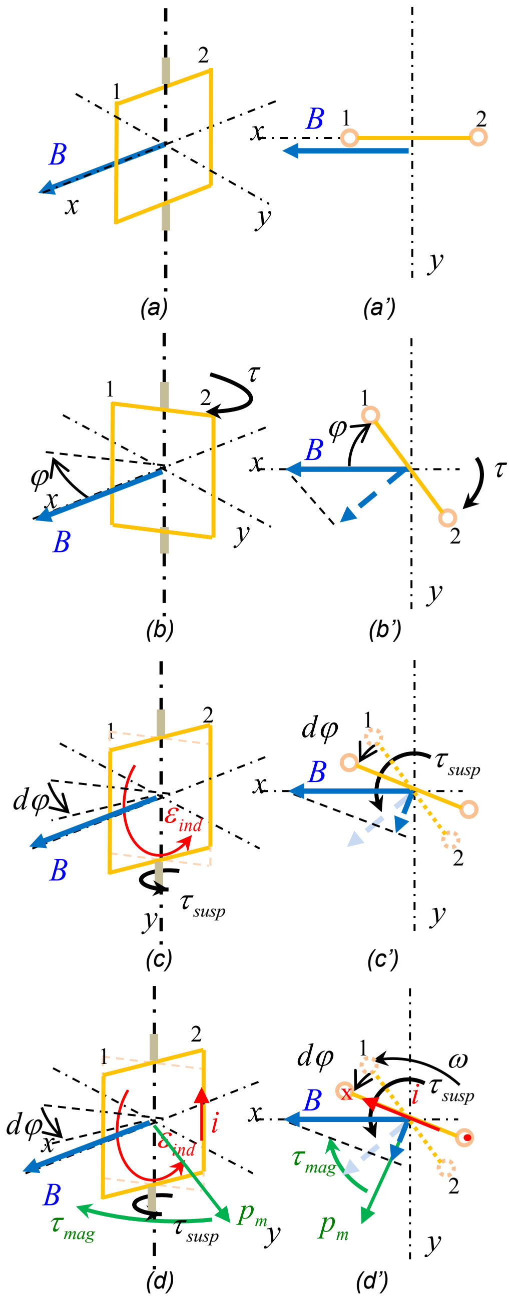


Fig.5.37

$$\tau_m = \frac{(BA)^2}{R}\cos^2(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} \qquad ecs.5.68$$

Este par actúa en sentido opuesto al giro de la espira. Si se tiene en cuenta que el medio en que se encuentra sumergido el sistema móvil es aire, la oposición al movimiento ejercida por el mismo será:

$$\tau_a = \kappa_a \frac{d\varphi}{dt} \qquad ecs.5.69$$

Considerando además la oposición ejercida por el par proporcional al ángulo de torsión de la cinta de suspensión, τ_{susp}, la ecuación de movimiento del sistema móvil del instrumento con momento de inercia $\Im$, resulta:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[\kappa_a + \frac{(BA)^2}{\Im R}\cos^2\varphi\right]\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\kappa_{sus}}{\Im}\varphi = 0$$

ecs.5.70

Esta es la ecuación diferencial correspondiente al sistema dejado en libertad luego de apartarlo de la posición de equilibrio, sin una excitación adicional.

Si se consideran pequeñas oscilaciones de la espira en torno a la posición de equilibrio, la expresión 5.70 resulta

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[\kappa_a + \frac{(BA)^2}{\Im R}\right]\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\kappa_{sus}}{\Im}\varphi = 0$$

ecs.5.71

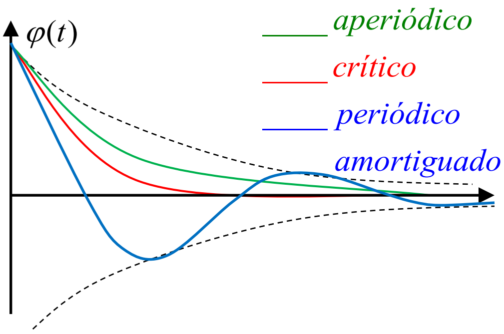
Que es de la forma

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k_1\frac{d\varphi}{dt} + k_2\varphi = 0 \qquad ecs.5.72$$

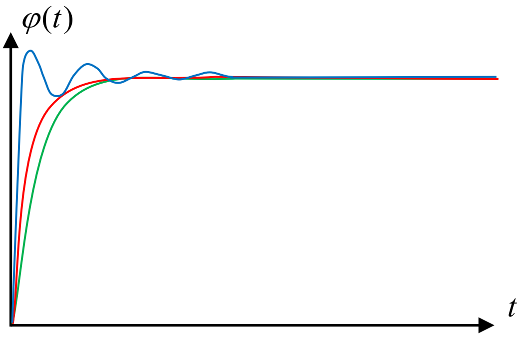
Siendo una solución para pequeñas oscilaciones:

$$\varphi(t) = \varphi_{máx}\, sen(\omega_0 t + \alpha)e^{-t/\tau} \qquad ecs.5.73$$

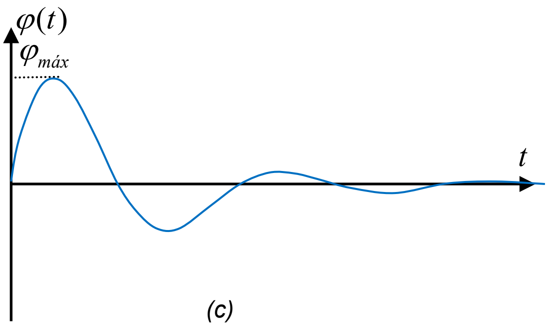
Donde α es el ángulo que forma el plano de la espira con la dirección del campo al momento de soltarla.



(a)



(b)



(c)

Fig.5.38

La ecs.5.72 conduce a tres tipos de soluciones.

Apartado el sistema móvil de su posición de equilibrio, puede ocurrir que vuelva a ella muy lentamente (movimiento aperiódico), rápidamente sin llegar a oscilar (movimiento crítico) o se observen oscilaciones de amplitud decreciente (periódico amortiguado).

Las características del sistema móvil junto con la resistencia eléctrica del circuito, permiten construir instrumentos que, diferenciándose de los galvanómetros comunes, basan su funcionamiento en la respuesta oscilatoria del mismo (Fig.5.38c).

Cuando se utiliza el instrumento de imán permanente y bobina móvil para medir la corriente por el circuito, se deberá tener en cuenta el par motor adicional correspondiente a la misma. La solución de la ecuación diferencial resultante es la superposición de la solución libre y la forzada, ecs.4.43. Por este motivo, la aguja alcanzará la posición de equilibrio, proporcional a la corriente medida (fig.5.38b), siguiendo alguna de las tres respuestas posibles, según las características constructivas del instrumento. Tomando derivadas primera y segunda de ecs.5.73 y reemplazando en ecs.5.72 se comprueba que es solución de la ecuación diferencial con:

$$\tau = \frac{2}{k_1} \qquad \textit{ecs.5.74}$$

$$\omega_0^2 = k_2 - \frac{1}{\tau^2} \qquad \textit{ecs.5.75}$$

Reemplazando k_1 y k_2, ecs.5.71, se obtiene:

$$\tau = \frac{2}{\kappa_a + \frac{(AB)^2}{R\Im}} \quad \text{(s)} \qquad \textit{ecs.5.76}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa_{sus}}{\Im} - \frac{1}{\tau^2}} \quad \left(\frac{rad}{s}\right) \qquad \textit{ecs.5.77}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\kappa_{sus}}{\Im} - \frac{1}{\tau^2}}} \quad \left(\frac{rad}{s}\right) \qquad \textit{ecs.5.78}$$

El galvanómetro balístico

El galvanómetro balístico es un instrumento con periodo de oscilación suficientemente grande respecto a la duración del pulso de corriente que se desea medir, cuya magnitud es suficiente para apartar del equilibrio al sistema móvil pero por su corta duración no interviene en la dinámica del mismo.

Su funcionamiento se basa en el mismo principio del péndulo balístico. En este caso, el pulso de corriente, cuya cantidad de carga se desea conocer, inicia el movimiento oscilatorio del sistema móvil imprimiéndole energía cinética de rotación que se va transformando en energía potencial elástica en el sistema de suspensión hasta alcanzar la máxima elongación.

Cuando un proyectil impacta sobre la masa del péndulo, su cantidad de movimiento impulsa al péndulo que adquiere determinada cantidad de energía cinética, transformada totalmente en energía potencial cuando alcanza la máxima elongación a partir de la cual invierte el sentido del movimiento. De esta manera, oscila en torno a la posición de equilibrio, con amplitud cada vez menor hasta amortiguarse totalmente. La máxima elongación alcanzada es proporcional al impulso transferido al péndulo y su determinación permite conocer la velocidad del proyectil.

Al aplicar un pulso de corriente de corta duración, el par resultante $\tau_{externo}$ es:

$$\tau_{externo} = ABi(t)$$

Esta expresión considera que inicialmente el plano de la espira es paralelo a la dirección del campo sin cambiar su orientación de manera apreciable durante el intervalo dt en que está aplicado el pulso de corriente $i(t)$.

Suponiendo que la bobina móvil consta de N espiras, el impulso de rotación que recibe es proporcional a la carga total Q que pasa por el bobinado.

$$\int_0^{t_p} \tau_{externo} dt = NAB \int_0^{t_p} i(t)dt = NABQ$$

Este impulso incrementa la cantidad de movimiento de rotación del sistema desde cero hasta $\Im\omega_0$ antes que el mismo comience a girar.

$$\int_0^{t_p} \tau_{externo} dt = \Im\omega_0$$

Resultando

$$Q = \frac{\Im}{NAB}\omega_0$$

La energía cinética inicial será igual a la energía potencial elástica correspondiente a la máxima elongación:

$$\frac{1}{2}\Im\omega_0^2 = \frac{1}{2}\kappa_{sus}\varphi_{máx}^2$$

$$Q = \left(\frac{1}{NAB}\sqrt{\frac{\kappa_{sus}}{\Im}}\right)\varphi_{máx}$$

La máxima excursión de la aguja en la primera oscilación es proporcional a la cantidad de carga que circuló por el bobinado como resultado del pulso de corriente de corta duración.

Aún sin tener conocimiento de la contante de proporcionalidad, es posible comprobar que la f.e.m. inducida es directamente proporcional a la variación temporal del flujo magnético verificando, para diferentes valores de la corriente primaria en fig.5.22, que existe proporcionalidad entre la máxima desviación de la aguja en el galvanómetro y dicha corriente.

Este instrumento también es utilizado para la medida de campos magnéticos constantes, introduciendo en la región de campo una pequeña bobina de prueba orientada para máximo flujo a través de ella. El impulso de rotación se consigue al retirar rápidamente este bobinado de la región de campo magnético.

Existen otros métodos para realizar este tipo de medidas.

Uno de ellos se basa en cargar un capacitor con la carga cuyo valor se desea determinar y medir la diferencia de potencial entre placas del mismo. Como se vio en el capítulo 2, uno de los inconvenientes que se presentan es la descarga del capacitor a través del instrumento de medida. El amplificador integrador analógico permite realizar este tipo de medidas.

Otra manera de determinar la cantidad de carga es adquiriendo valores del pulso de corriente a medida que transcurre el tiempo. La determinación del área bajo la curva i(t) representa la cantidad total de carga.

ACTIVIDADES

5.1 Considere el imán de fig.5.3 cayendo hacia la espira con el polo sur apuntando hacia ella.

a) Indique si el sentido de la f.e.m. inducida es horario o anti-horario.

b) Explique si se modifica la magnitud de la f.e.m. inducida a medida que se acerca a la espira.

c) Repita a) y b) considerando que el imán atravesó la espira y sigue cayendo alejándose de ella.

d) Evalúe la posibilidad de que en algún momento durante la caída la f.e.m. inducida se anule, dando una justificación a su respuesta.

e) Explique en cuáles de los incisos anteriores existe circulación de corriente e indique el sentido de la misma en caso de que exista.

5.2 a) ¿Se modificará alguna de las respuestas para el ejercicio anterior si la espira está cortada?

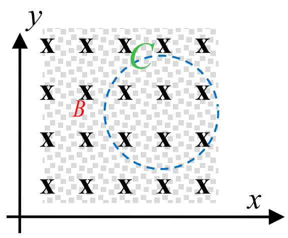


Fig.5.39

5.3 En fig.5.39 se esquematiza una región de campo magnético normal al plano del dibujo y entrante cuya sección transversal es cuadrada de 3 cm de lado.

$$\vec{B}(x,y,z,t) = -0{,}34t^2\ \breve{k}\ (T)\quad 0<t<1s$$
$$\vec{B}(x,y,z,t) = -0{,}34e^{-5(t-1)}\ \breve{k}\ (T)\quad t>1s$$

a) Calcule el flujo del campo magnético a través de la circunferencia C de 1 cm de radio en el intervalo 0<t<1 s.

b) Para el instante anterior a t=1seg, calcule el valor de la f.e.m. inducida a lo largo de la curva C indicando si su sentido es horario o anti-horario.

c) Repita b) para el instante posterior a t=1seg.

d) Represente gráficamente en función del tiempo la f.e.m. inducida para 0<t<2 s considerando que valores positivos corresponden a sentido anti-horario de la misma.

5.4 Repita 5.3b para el caso en que el campo magnético responde a la expresión

$$\vec{B}(x,y,z,t) = 0,33\breve{i} + 0,57\,\breve{j} - \frac{0,56}{t^2}\breve{k}$$

5.5 Un campo magnético normal al plano de la figura y entrante está confinado en un cilindro de 1 cm de radio (fig.5.40).

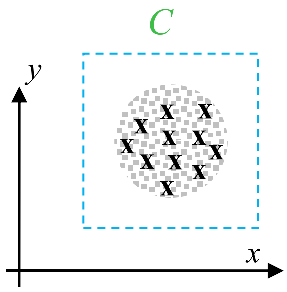


Fig.5.40

a) Determine la f.e.m. inducida en el cuadrado de 3 cm de lado 100 ms después de que comenzó a modificarse el campo magnético si su magnitud responde a la expresión:

$$B(\mathrm{t}) = 1,37x10^{-3}\ t^3\ \ (T)\quad 0 < t < 0,5\ s$$

b) Transcurridos los 0,5 s indicados en el inciso anterior se interrumpe la corriente que origina el campo magnético el cual decae exponencialmente con constante de tiempo de 0,7 μs. Calcule el valor máximo de la f.e.m. inducida en el cuadrado.

5.6 Repita el inciso a) del ejercicio anterior considerando que el campo en la región sombreada disminuye de acuerdo con la expresión:

$$B(\mathrm{t}) = \frac{1,37x10^{-5}}{r}\ t^3 \qquad (T) \quad 0 < t < 0,5\ s$$

$$0 > r > 0,01\ \ m$$

5.7 El toroide representado en la fig.5.41 tiene un radio medio de 5 cm, $0,008\ m^2$ de sección transversal y 300 espiras devanadas sobre el núcleo con permeabilidad 450 veces la del vacío. Completa el dispositivo un bobinado abierto de cinco espiras.

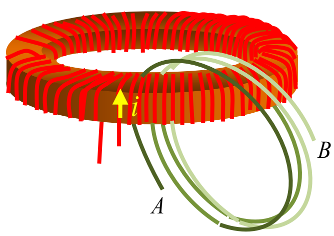


Fig.5.41

a) Suponiendo que las espiras formadas por cada vuelta del cable son circunferencias de 3,5 cm de radio, calcule el flujo magnético que atraviesa este bobinado cuando por el toroide circula una corriente de 0,8 A en el sentido indicado.

b) ¿Existe diferencia de potencial entre los puntos A y B?

c) Se modifican las respuestas anteriores al conectar entre A y B una resistencia de 1000Ω?

d) Estando conectada la resistencia, al cortar la corriente por el primario se observa que la tensión en bornes de la resistencia se anula en un intervalo de tiempo muy corto. Calcule la cantidad de carga que circula por el circuito secundario.

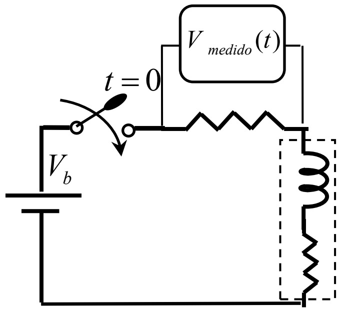


Fig.5.42

5.8 Aplicando una fuerza externa, la espira de fig.4.43 ingresa a la región de campo magnético con velocidad constante v.

a) Exprese la f.e.m. inducida en la espira en función de los datos del problema.

b) Encuentre la expresión de la corriente por la espira cuando la misma está ingresando a la región de campo, suponiendo que su resistencia es R.

c) Demuestre que la cantidad de carga eléctrica que circula en el mismo sentido al colocar la espira totalmente en la región de campo magnético coincide con la relación entre el flujo magnético a través de la espira y la resistencia de la misma.

d) Verifique que la energía necesaria para colocar la espira totalmente en la región de campo se disipa en la resistencia.

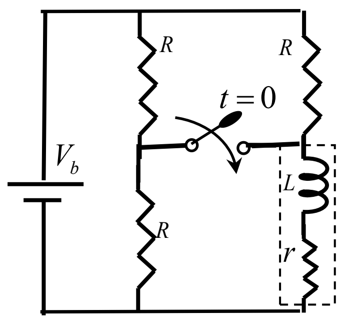


Fig.5.43

5.9 Repita el ejercicio anterior suponiendo que el campo magnético se distribuye de acuerdo a la expresión:

$$B(x) = B_0 \frac{x}{2d} \qquad 0 < x < 2d$$

5.12 c) Se puede considerar que se alcanzó el estado después de transcurridas diez constantes de tiempo.

Considere

$V_b = 10V$, $R = 100\Omega$, $L = 850mHy$, $r = 3\Omega$

5.10 Se disponen dos bobinas de inductancia L1=2 mHy y L2= 5mH una al lado de la otra.

Haciendo circular por L_1 una corriente

$$i(t) = 0,47t \quad 0 < t < 10s$$

se mide, dentro de dicho intervalo de tiempo, una tensión de 0,25 mV en extremos de L_2.

a) Calcule la inductancia mutua del sistema.

b) Calcule el coeficiente de acoplamiento entre ambas bobinas.

c) Determine el máximo valor que podría obtenerse para la tensión en L_2 disponiendo convenientemente ambas bobinas. ¿Se modificó el valor de la inductancia mutua?

5.11) En el circuito de fig.5.42, en paralelo con una resistencia de 0,87Ω se conecta un instrumento que permite graficar la tensión en función del tiempo, observándose que inmediatamente después de conectar la fuente, la tensión sobre dicha resistencia comienza a crecer a un ritmo de 15,38 V/s estabilizándose después de 10 s en un valor constante de 4,73 V. Suponiendo $V_b = 7V$ determine la inductancia y resistencia del inductor.

5.12 a) Considerando que el tiempo transcurrido desde que se conectó la fuente al circuito de fig.5.43 es suficiente para que se estabilicen las corrientes por el mismo, determine el valor de la corriente por la inductancia inmediatamente después de cerrar el interruptor.

b) Calcule el valor de la corriente por el inductor una vez que se alcanzó el estado estacionario. Estime el intervalo de tiempo debe transcurrir a partir del cierre del interruptor hasta llegar al estado estacionario?

c) Estando el interruptor cerrado, el circuito se encuentra en estado estacionario, determine la sobretensión en el interruptor al abrirlo.

5.13 Reemplace en ecs.5.46 la corriente por el valor correspondiente de ecs.5.48. Resolviendo la ecuación diferencial resultante, de manera análoga a la ecs.5.9, podrá obtener la expresión de la velocidad de la varilla en función del tiempo. Utilice el resultado obtenido para comprobar que se llega a la velocidad límite expresada por ecs.5.49 con constante de tiempo $\tau = mR / (Bl)^2$

5.14 La ecs.5.51 expresa la potencia mecánica en función de la corriente por la varilla.

a) A partir de la misma, verifique que la máxima potencia entregada a la varilla se obtiene cuando la corriente por el circuito es $V_b / 2R$.

b) Determine la potencia mecánica, velocidad de la varilla y fuerza de rozamiento para la condición indicada en el inciso a).

c) Determine la potencia entregada por la fuente de tensión y la disipada en la resistencia para la condición indicada en el inciso a).

d) Grafique la potencia mecánica en función de la fuerza de rozamiento.

e) Repita los incisos b) y c) para una variación de ±10% en F_{roz}.

Considere *l*=3cm, R=0,1Ω, B= 0,8T, V_b=1,2V

.

5.15 Complete la ecs.5.53 incorporando la fricción de la varilla con los rieles y demuestre que la energía eléctrica disponible se reduce debido a este efecto.

5.16 Una bobina plana, formada por 100 espiras de alambre de cobre de 0,05 mm de radio con forma rectangular de 4 cm de ancho y 6 cm de largo, gira sobre uno de sus ejes impulsada por una turbina a 3000 r.p.m. Los extremos del bobinado están unidos eléctricamente a dos anillos conductores sin conexión eléctrica entre sí que giran con el sistema y sobre los que rozan dos carbones permitiendo la conexión con un circuito externo fijo.

a) Suponiendo que en la región existe un campo magnético uniforme de 375mT dirigido perpendicularmente al eje de giro y abarcando completamente a la bobina, encuentre la expresión de la f.e.m. inducida en la misma.

b) Calcule la resistencia del bobinado.

c) Considerando una densidad de corriente máxima de 2 A/mm2, calcule el menor valor que puede tener una resistencia conectada a este generador.

d) Para las condiciones del inciso c) ¿Cuál será la tensión sobre la resistencia externa?

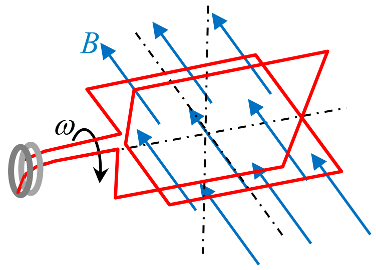


Fig.5.44

5.17 Al dispositivo del ejercicio anterior se agrega un segundo bobinado, idéntico al considerado pero dispuestos perpendicularmente entre sí (fig.5.44). Determine la expresión de la tensión en los bornes de salida para el caso en que los bobinados están conectados en serie.

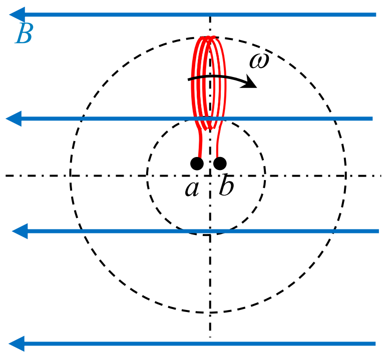


Fig.5.45

5.18 Considere una bobina plana con 100 espiras de radio R=2,8 cm que gira a 3000 r.p.m. describiendo una circunferencia en una región de campo magnético uniforme de 375 mT, como se indica en fig.5.45. La espira está abierta denominándose a sus extremos con a y b los cuales se unen a dos anillos aislados entre sí que sirven como conexionado a un circuito externo. Encuentre la expresión de la f.e.m. inducida en la espira y utilícela para determinar la expresión de la diferencia de potencial entre los anillos a b.

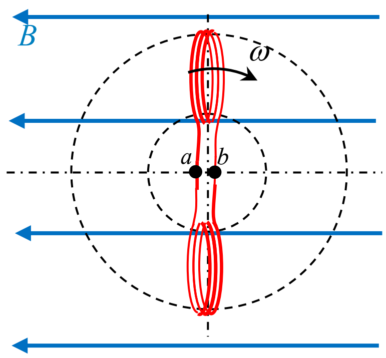


Fig.5.46

5.19 Al sistema del ejercicio anterior se agrega una segunda bobina idéntica a la anterior desplazada 180° (fig.5.46).

a) Deduzca la expresión de la tensión en los terminales a y b

b) ¿Existe corriente en el circuito formado por ambas espiras? Justifique su respuesta.

5.20 Se disponen cuatro bobinas idénticas a las del ejercicio anterior, separadas 90° entre sí en el sentido de su giro. Las espiras, en serie de a dos se conectan en paralelo con los anillos de contacto representados por los puntos a y b (fig.5.47). Deduzca la expresión de la diferencia de potencial entre los puntos a y b.

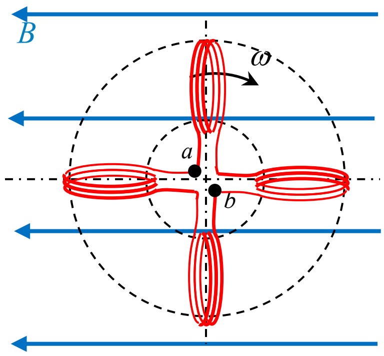


Fig.5.47

5.21 Seis bobinas idénticas a las del ejercicio 5.18 unidas como se indica en fig.5.48 giran a 3000 r.p.m. en el sentido indicado. Considerando que la figura corresponde al instante t=0, calcule la tensión entre a y b cuando:

a) $\omega t = 15º$

b) $\omega t = 90º$

c) $\omega t = 210º$

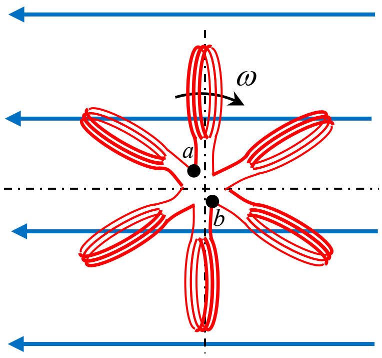


Fig.5.48

5.22) a) Deduzca la expresión de la inductancia del bobinado de fig.5.49. Considere N espiras N, longitud media del circuito magnético ℓ_h, sección transversal del mismo, A_h y permeabilidad del medio μ.

b) Calcule el valor de la inductancia para N= 350espiras, $l_h = 16cm$, $A_h = 1cm^2$ y $\mu = 650\mu_0$, $B_{sat} = 1,2T$

c) Se conecta el bobinado a una fuente de tensión variable en el tiempo según la expresión:

$v_1(t) = 12sen(314t)$

Considerando despreciable la resistencia eléctrica del bobinado y las pérdidas en el material ferro-magnético el circuito eléctrico equivalente se reduce a una inductancia conectada a la fuente de tensión. Escriba la ecuación de la malla así formada y utilícela para determinar la expresión en función del tiempo de la corriente por la bobina, utilizando los datos del inciso b).

d) Determine la expresión del campo magnético en el material en función del tiempo, calcule el valor máximo que puede alcanzar y compárelo con el valor de saturación especificado.

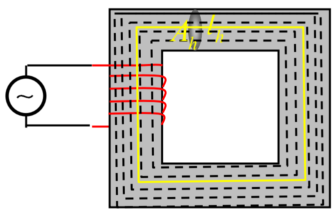


Fig.5.49

Cualquier curva cerrada que contenga al circuito magnético será atravesada por el flujo magnético variable en el mismo induciéndose una f.e.m. Para que exista una relación lineal entre la tensión aplicada y la f.e.m. inducida, el campo magnético en el material debe mantenerse en la región de linealidad (fig.4.26) sin llegar a la zona donde comienza la saturación.

5.23) a) En el núcleo del ejercicio anterior se corta un entre hierro de longitud $\ell_0 = 1cm$ (fig.5.50). Suponiendo 10% de de dispersión, determine la expresión de la inductancia y calcule su valor.

b) Compare los resultados obtenidos con y sin entrehierro y determine la amplitud de corriente que produciría el mismo valor de campo magnético en el hierro que en el ejercicio anterior.

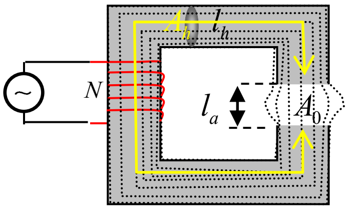


Fig.5.50

5.24) En el circuito del ejercicio anterior se reemplaza la fuente de tensión variable por una batería y resistencias conectadas como se muestra en la figura, introduciéndose en el entrehierro una bobina plana con 1000 vueltas conectada a un galvanómetro balístico, siendo la resistencia de este circuito igual a 1370Ω. (fig.5.51)

a) Calcule el flujo magnético que atraviesa el segundo bobinado considerando que la llave ha permanecido cerrada durante bastante tiempo.

b) Resuelva el circuito primario a partir del instante en que se abre la llave y encuentre la expresión en función del tiempo para el flujo a través del bobinado con N2 espiras.

c) Deduzca la expresión para la corriente en este bobinado en función del tiempo y utilícela para calcular la cantidad de carga total que circuló por el mismo.

d) Compare el resultado obtenido en el inciso anterior con el que obtendría aplicando directamente la ecs.5.36.

Para el caso en que no se tiene en cuenta la resistencia en serie con el bobinado, debido a que la f.e.m. inducida es igual a la tensión aplicada, el flujo magnético es el mismo independientemente de la existencia de entrehierro. Esto tiene que servir para comprobar el resultado que obtenga para el ejercicio de 5.21c.

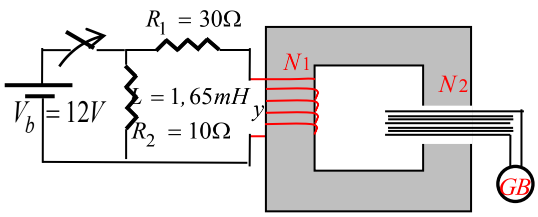


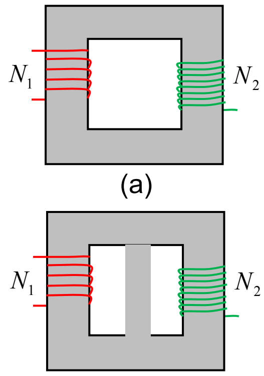
Fig.5.51

5.25) Sobre un núcleo magnético de forma cuadrada, longitud media 20 cm y sección transversal $1,8cm^2$ y permeabilidad relativa $K_m = 890$ se devanan dos bobinados (fig.5.52a), el primario con $N_1 = 340$ y el secundario con $N_2 = 930$ espiras.

Considerando que la corriente por el primario es: $i_1(t) = 1,5sen(314t) \quad (mA)$

a) Encuentre la el valor de la amplitud de tensión en el secundario.

b) Repita a) para el caso en que el circuito magnético tenga una columna central del mismo material con igual sección transversal. Suponga que la corriente primaria no se modifica.



(b)

Fig.5.52

5.26) Cuando en una región en la que existe un campo magnético $\vec{B}$ se mueve un alambre de longitud ℓ con velocidad $\vec{v}$ manteniéndose sobre la normal al plano formado por ambos vectores, se induce una f.e.m. cuya expresión por unidad de longitud del alambre es

$$\frac{\varepsilon}{\ell} = \vec{v}x\vec{B}$$

Mediante la misma exprese en función de los datos del ejercicio la f.e.m. inducida en el alambre de fig.5.35 soportado sobre un cilindro de madera que gira con velocidad angular ω en un campo uniforme normal al eje de giro.

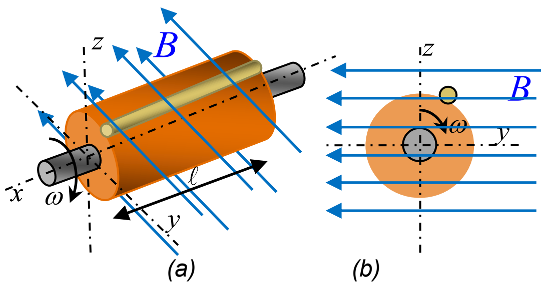


Fig.5.53

5.27) a) Repita el ejercicio anterior para el caso en el que se agrega un segundo alambre diametralmente opuesto al anterior (fig.5.54).

b) Considerando que ambos alambres se conectan en serie formando una espira, verifique el resultado obtenido comparándolo con el correspondiente a la ecs.5.57.

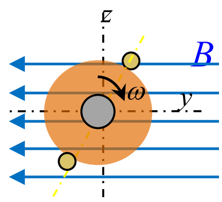


Fig.5.54

En el ejercicio 5.8), cuando la espira está ingresando a la región de campo magnético el valor de la f.e.m. inducida depende de la longitud del alambre dispuesto normalmente al campo y a la dirección del movimiento, sin depender de la extensión de la espira. En la segunda parte del libro se encontrará una justificación a este resultado.

CAPITULO 6

CORRIENTES VARIABLES EN EL TIEMPO

Respuesta libre de circuitos RC, LC y RLC

Como ocurre con el campo magnético, el establecimiento de un campo eléctrico en una región del espacio requiere la realización de un trabajo que en este caso se almacena en forma de energía en el mismo.

La acumulación de cargas que da origen a un campo eléctrico implica un movimiento de las mismas durante el cual se origina un campo magnético. De esta manera, las dos formas de energía pueden convivir intercambiándose entre sí como ocurre con las energías potencial y cinética.

Cuando este intercambio de energía está confinado en una región del espacio, como ocurre en algunos circuitos, se producen oscilaciones. Dependiendo de la rapidez de las mismas, forma y dimensiones del circuito que las origina, estas oscilaciones pueden desprenderse del circuito radiando energía electromagnética hacia el exterior.

En este capítulo comenzaremos a tratar las oscilaciones confinadas en circuitos mostrando algunas aplicaciones prácticas de las mismas.

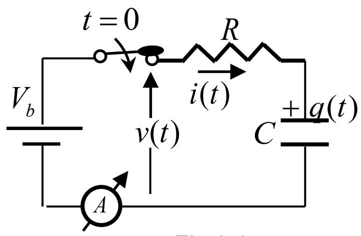


Fig.6.1

Circuitos RC

De manera similar al establecimiento del campo magnético en una inductancia, el establecimiento desde cero de un campo eléctrico entre las placas de un capacitor ocurre en un intervalo de tiempo en el que las magnitudes intervinientes se modifican hasta equilibrarse al llegar al estado estacionario o régimen permanente de corriente continua.

En la fig.6.1 se esquematiza la situación presentada al conectar un capacitor a una batería.

Intercalando un amperímetro se observa desviación de la aguja inmediatamente después de la conexión, indicando la existencia de una corriente que disminuye hasta anularse con el transcurso del tiempo.

Para obtener la expresión de la corriente en función del tiempo resolviendo la ecs.5.6, se debe tener en cuenta que en este caso se considera despreciable la inductancia del circuito. Como en el transitorio RL, la excitación está dada por 5.8, quedando:

Cuando el sentido elegido para la corriente es hacia la placa del capacitor a la que asignamos polaridad positiva, la carga estará en aumento y su derivada respecto al tiempo coincide con la corriente como en ecs.6.2.

Si la elección del sentido para la corriente es tal que se aleja de la placa positiva, habrá que anteponer el signo menos para indicar que la carga está disminuyendo.

$$V_0 = i(t).R + \frac{q(t)}{C} \quad t > 0$$ ecs.6.1

Expresando la corriente eléctrica en función de la carga:

$$V_0 = \frac{dq(t)}{dt}.R + \frac{q(t)}{C} \quad t > 0$$ ecs.6.2

Alcanzado el estado estacionario, el circuito quedará abierto, sin circulación de corriente.

$$i(\infty) = 0$$ ecs.6.3

Es posible analizar que sucede inmediatamente después de conectar la batería a partir de la relación entre carga y corriente eléctrica.

$$q(0^+) - q(0^-) = \int_{0^-}^{0^+} i(t)dt$$ ecs.6.4

En el peor de los casos, considerando que no existe caída de potencial en el capacitor, el valor máximo posible para la corriente es V_b / R. Por este motivo, el resultado de la integral corresponde al área de un rectángulo de altura finita y base tendiendo a cero, resultando nulo su valor. Se puede resumir este resultado diciendo que en un capacitor la carga no puede modificarse en un intervalo de tiempo muy pequeño.

Como la relación entre carga y capacidad es la diferencia de potencial entre placas, lo anterior equivale a considerar que la diferencia de potencial en un capacitor no puede sufrir cambios bruscos en reducidos intervalos de tiempo.

$$v_C(t^+) = v_C(t^-)$$ ecs.6.5

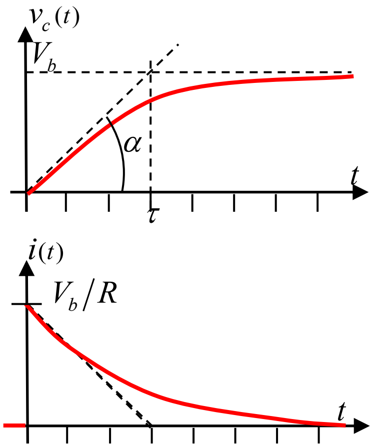


Fig.6.2

La resolución de la ecuación diferencial 6.2 permite obtener la variación temporal de la corriente por el circuito. Procediendo de manera similar al tratamiento realizado para los circuitos RL, se obtiene la expresión temporal de la carga eléctrica:

$$q(t) = CV_0\left(1 - e^{\frac{-1}{RC}t}\right)$$ ecs.6.6

Siendo $\tau = RC$ la constante de tiempo del circuito expresada en segundos.

La expresión de la corriente se obtiene derivando 6.6 en el tiempo:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{\frac{-1}{RC}t}$$ ecs.6.7

En la Fig.6.2 se muestra la variación temporal de las magnitudes intervinientes. En la misma se adoptó una constante de tiempo igual a tres unidades de las utilizadas para representar el tiempo.

La energía entregada por la batería es:

$$U_{bat} = \int_0^\infty V_0.i(t).dt$$ ecs.6.8

$$U_{bat} = \int_0^\infty V_0 \cdot \left(\frac{V_0}{R} e^{\frac{-1}{RC}t} \right).dt$$

$$U_{bat} = CV_0^2$$ ecs.6.9

La energía entregada a la resistencia resulta:

$$U_R = \int_0^\infty \left(i(t)\right)^2 Rdt$$ ecs.6.10

$$U_R = \int_0^\infty \left(\frac{V_0}{R} e^{\frac{-1}{RC}t} \right)^2 Rdt$$

$$U_R = \frac{1}{2} CV_0^2$$ ecs.6.11

La energía entregada al capacitor

$$U_C = \int_0^Q v_C(t).dq$$ ecs.6.12

$$U_C = \int_0^Q \frac{q}{C}.dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$ ecs.6.13

Que también puede expresarse en función de la tensión de la fuente

$$U_C = \frac{1}{2} CV_0^2$$ ecs.6.14

Estos resultados indican que durante el proceso de carga del capacitor, mitad de la energía entregada por la batería se almacena en este mientras que la otra mitad se disipa en la resistencia del circuito.

Las expresiones 6.13 y 6.14 coinciden con las de ecs.2.8 obtenidas para un capacitor cargado en estado estacionario.

Descarga de un capacitor

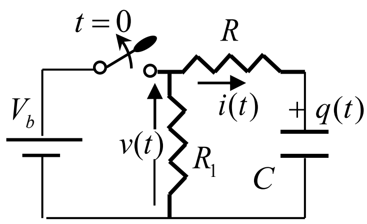


Fig.6.3

En la Fig.6.3 se muestra el circuito de descarga en el que se agregó una resistencia R_1. Con el fin de realizar una comparación, se supone que la corriente tiene el mismo sentido que en la carga.

En este caso, la ecuación diferencial correspondiente a la malla se reduce a la expresada en 6.15

$$\frac{dq(t)}{dt}(R + R_1) + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad t > 0$$ ecs.6.15

Con la condición inicial

$$q(0) = CV_0$$

Que es el valor correspondiente al estado estacionario antes de la apertura del interruptor. La solución de ecs.6.15 permite expresar la carga en el capacitor en función del tiempo.

$$q(t) = CV_0 e^{\frac{-t}{(R+R_1)C}} \qquad \textit{ecs.6.16}$$

Resultando la diferencia de potencial en el capacitor y la corriente por el circuito:

$$v_C(t) = V_0 e^{\frac{-t}{(R+R_1)C}} \qquad \textit{ecs.6.17}$$

$$i(t) = -\frac{V_0}{R+R_1} e^{\frac{-t}{(R+R_1)C}} \qquad \textit{ecs.6.18}$$

En la Fig.6.4 se comparan los transitorios de carga y descarga para el caso en que R1=R.

Utilizando la expresión para la corriente dada en la ecs.6.18, la energía disipada por este circuito durante el transitorio de descarga, resulta:

$$U = \int_0^{\infty} \left(\frac{-V_0}{(R+R_1)} e^{\frac{-1}{(R+R_1)C}t} \right)^2 (R+R_1)\, dt$$

$$U = \frac{1}{2} CV_0^2 \qquad \textit{ecs.6.19}$$

La energía almacenada en el capacitor durante el transitorio de carga, se disipa en la resistencia en el transitorio de descarga.

Tal como se trató en el capítulo 2, el trabajo realizado para establecer un campo electrostático se almacena en forma de energía en el campo eléctrico entre las placas del capacitor y puede recuperarse en la descarga del mismo.

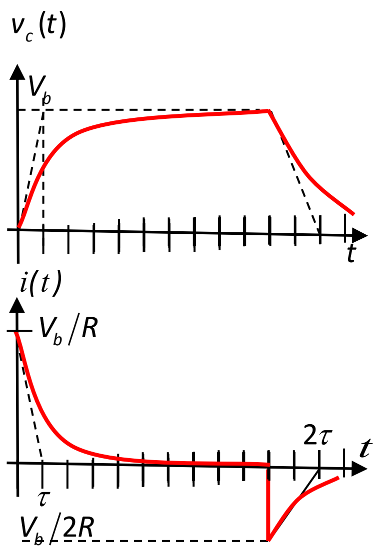


Fig.6.4

En una capacidad:	
Ante modificaciones:	$v_C(t^+) = v_C(t^-)$
En estado estacionario:	$i_C(\infty) = 0$

Tabla 6.1

A diferencia del campo magnético, en que debe circular una corriente eléctrica para su mantenimiento, en este caso si no existe un camino por donde puedan escapar, las cargas permanecen indefinidamente sobre las placas. En la práctica, debido a las corrientes de fuga, el capacitor se descarga lentamente.

Régimen transitorio de continua en circuitos RC

Resolución de los estados inicial y final

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de circuitos RL y utilizando los resultados obtenidos en las ecs.6.3 y 6.5, resumidos en la tabla 6.1, es posible resolver las situaciones presentadas al inicio del régimen transitorio y una vez alcanzado el estado estacionario de continua.

Ejercicio 6.1:

Considerando el circuito de Fig.6.5, determine la diferencia de potencial entre placas del capacitor y utilice el resultado para calcular la corriente máxima por el mismo después de cerrar el interruptor. ¿Cuál será la diferencia de potencial entre placas del capacitor alcanzado el estado estacionario final?

Resolución.

Considerando que la llave hace mucho que está abierta, en estado estacionario el circuito puede reducirse al de Fig.6.6a, donde los tres resistores están en serie.

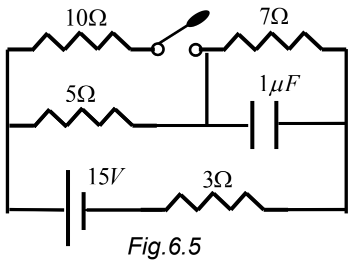


Fig.6.5

La corriente por el circuito es de 1A y la diferencia de potencial entre los extremos x y en los que está conectado el capacitor, fig.6.6a, es

$$V_x - V_y = 1A x 7\Omega$$

$$V_C(\infty) = 7V$$

De acuerdo a los resultados indicados en Tabla 6.1, esta diferencia de potencial se mantiene en el instante posterior al cierre de la llave, como se muestra en Fig.6.6b.

$$i_{bat}(0^+) = \frac{15V - 7V}{19/3\Omega} = 1{,}26A$$

Resultando la corriente por el capacitor, en el instante posterior al cierre del interruptor:

$$i_C(0^+) = i_{bat}(0^+) - 1\text{A} = 0{,}26A$$

Esta es la máxima corriente por el capacitor que tenderá a anularse a medida que el mismo alcanza su nuevo estado de carga.

En fig.6.6c se muestra el circuito resultante una vez alcanzado el estado estacionario con el interruptor cerrado. En el mismo se reemplazaron las resistencias de 10, 5 y 3Ω por su resistencia equivalente.

$$i_{bat}(\infty) = \frac{15}{\frac{19}{3} + 7} = 1{,}125A$$

$$V_x - V_y = 1{,}125A x 7\Omega$$

$$v_C(\infty) = 7{,}875V$$

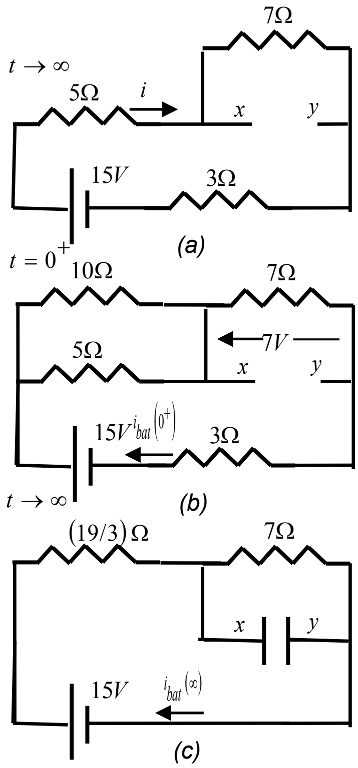


Fig.6.6

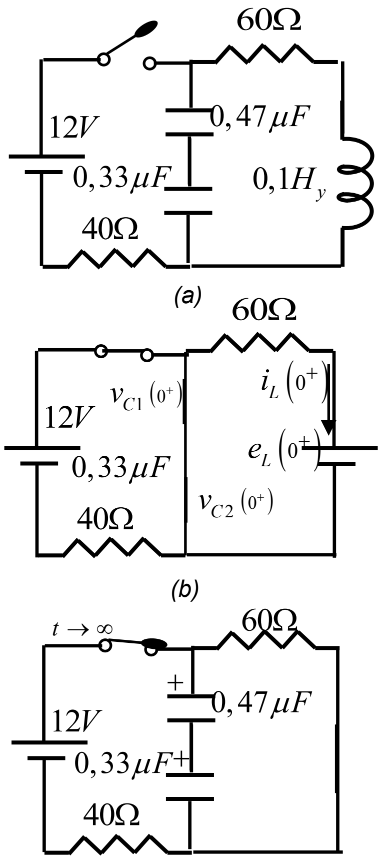
El capacitor se carga con 7,875 μC, siendo positiva la polaridad de la placa indicada con x.

Ejercicio 6.2

Para el circuito de la fig.6.7a, calcule:

a) Las corrientes iniciales y finales.

b) La carga de cada capacitor.



(c)

Fig.6.7

En este circuito coexisten los tres componentes pasivos. En dos de ellos se puede almacenar energía mientras que en la resistencia se transfiere al medio en forma de calor.

Antes de cerrar la llave no hay energía almacenada en el campo eléctrico dentro del capacitor ni campo magnético en la inductancia, de modo que las condiciones iniciales son:

$$v_c(0^+) = 0$$
$$i_L(0^+) = 0$$

En la fig.6.7b se muestra el circuito equivalente correspondiente al instante posterior al cierre del interruptor.

En el instante inicial después del cambio, los capacitores no ofrecen impedimento al pasaje de la corriente mientras que la inductancia intenta mantener la corriente que era nula, resultando la entregada por la batería igual a 0,3A y nula la f.e.m. inducida en la inductancia.

La fig.6.7c esquematiza la situación una vez alcanzado el estado estacionario. La corriente de 0,12A entregada por la batería origina una caída de potencial de 7,2V sobre la capacidad equivalente de 0,19 μF . La diferencia de potencial entre placas de cada capacitor es de 2,97V y 4,23V.

Para conocer como es la variación temporal de los parámetros intervinientes, se deben resolver las ecuaciones diferenciales resultantes, tarea que se facilita utilizando herramientas matemáticas no contempladas para el nivel propuesto. De todos modos, es interesante la resolución temporal del circuito a partir del instante en que se vuelve a abrir el interruptor.

En fig.6.8 se grafica la corriente y f.e.m. inducida en la inductancia a partir del cierre del interruptor y su posterior apertura. En fig.6.8b con la escala de tiempos ampliada, se pueden observar las oscilaciones que se producen a partir de la apertura del interruptor.

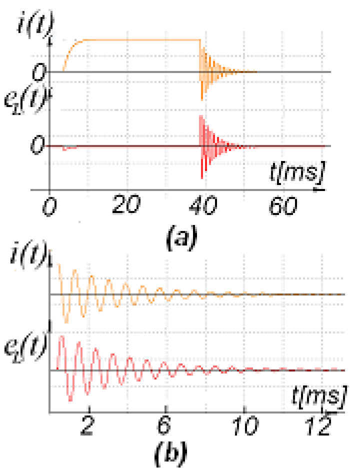


Fig.6.8

Corrientes en circuitos con capacidades

Mediante un amperímetro es posible verificar experimentalmente, como se indica en fig.6.1, que existe circulación de corriente durante la carga del capacitor. Incorporando un amperímetro en serie con el capacitor al circuito de fig.6.3 la comprobación experimental incluye también al transitorio en la descarga.

De los resultados obtenidos en los ejemplos anteriores, se puede observar que en un lazo que incluye una capacidad, hay circulación de corriente siempre que la carga en la misma se modifique con el transcurso del tiempo.

Aunque es fácil aceptar que la acumulación de cargas en una de las placas repele cargas de igual signo en la otra impulsándolas a circular por el resto del circuito, la necesidad de variación en el tiempo de las mismas para que exista continuidad en la corriente, no es aceptable a simple vista.

La respuesta se relaciona con el campo magnético generado por la circulación de corriente por el alambre.

Si la corriente es variable en el tiempo el campo también, induciendo una f.e.m. en oposición. Como se vio en el capítulo anterior, este efecto es tenido en cuenta por la inductancia del circuito y la corriente por el mismo es el resultado de una puja entre la f.e.m. aplicada y la que se opone.

Cuando la corriente por el alambre llega a una discontinuidad, como ocurre al alcanzar una de las placas del capacitor, no puede continuar su avance de modo que el campo magnético por ella producido tendría que apagarse. Esta disminución del campo induce una f.e.m. que tiende a mantener la circulación de corriente por el vacío entre placas en el mismo sentido en que lo hacía por el cable. Como este espacio se caracteriza por la no existencia de cargas en él, evidentemente la f.e.m. inducida no podrá originar corriente alguna que explique la continuidad de la misma por el resto del circuito.

La dificultad para explicar la continuidad de la corriente en un circuito con capacidad llevó a J.C. Maxwell a postular la existencia de una corriente de "desplazamiento" para diferenciarla de la corriente de "conducción" de los electrones por el alambre, relacionada con las variaciones del campo eléctrico entre placas originado por la acumulación de cargas en las mismas. Este postulado fue el punto de partida para su predicción sobre la existencia de ondas electromagnéticas.

En la deducción de las expresiones para la corriente en los diferentes casos considerados, se trabajó con la corriente a través de capacidades y resistencias de la misma manera, a pesar que una de las condiciones impuestas en el capítulo 3 para la existencia de corriente en un circuito menciona la necesidad de un lazo cerrado.

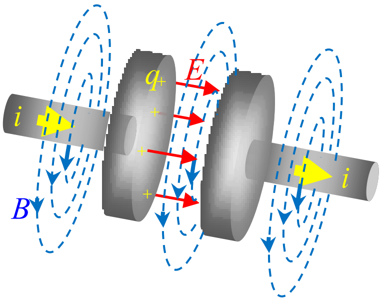


Fig.6.9

Mediante la teoría de campos es posible demostrar que campos magnéticos variables en el tiempo inducen campos eléctricos y a su vez la variación temporal de estos, inducen campos magnéticos. Este entrelazamiento de campos es el que avanza por el espacio entre placas hasta alcanzar la placa opuesta donde vuelven a interactuar con las cargas libres del conductor impulsando una corriente por el alambre.

Para que se produzca este efecto, las corrientes y cargas acumuladas en las placas del capacitor deben ser variables en el tiempo.

Respuesta libre de un circuito LC

Se denomina respuesta libre de un circuito a la evolución que siguen sus parámetros eléctricos hasta alcanzar, por sus propios medios y sin la intervención desde el exterior, el estado estacionario.

En la fig.6.10 se considera un capacitor cargado con carga Q_0, que se descargará a través de una inductancia a partir del cierre de la llave.

Una vez cerrada la llave comienza a circular corriente a través de la inductancia en el sentido convencional indicado en la fig.6.10b, induciéndose una f.e.m. que se opone a los cambios de flujo magnético.

Denominando $q(t)$ a la cantidad de carga que se desplaza originando la corriente $i(t)$, la diferencia de potencial entre las placas del capacitor resulta:

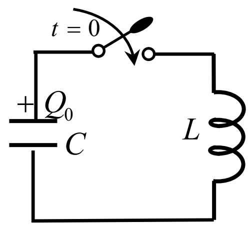
$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C} \qquad \textit{ecs.6.20}$$

Recorriendo la malla en sentido horario y teniendo en cuenta que la única fuente de f.e.m. corresponde a las variaciones de flujo magnético en la inductancia, la ecuación que la relaciona con las caídas de potencial en el lazo queda:

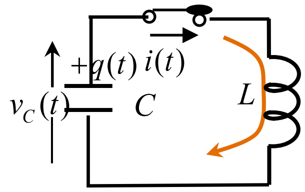
$$-L\frac{di}{dt} = \frac{q(t)}{C} \qquad \textit{ecs.6.21}$$

De acuerdo con la elección realizada para la carga, con polaridad opuesta a la correspondiente a la corriente, las condiciones de contorno son:

$$q(0) = -Q_0$$
$$i(0) = 0 \qquad \textit{ecs.6.22}$$



(a)



(b)

Fig.6.10

Expresando la corriente en función de la carga eléctrica, la ecs.6.21 queda:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{LC} = 0 \qquad \textit{ecs.6.23}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo grado homogénea con coeficientes constantes cuya solución es del tipo:

$$q(t) = A\cos(\omega_0 t + B) \qquad \textit{ecs.6.24}$$

Quedando para la corriente,

$$i(t) = -\omega_0 A sen(\omega_0 t + B) \qquad \textit{ecs.6.25}$$

Considerando las condiciones iniciales,

$$i(0) = -A\omega_0 senB = 0 \rightarrow B = \begin{cases} 0° \\ 180° \end{cases} \qquad \text{ecs.6.26}$$

Si se adopta B=0°,

$$q(0) = A\cos(0°) = -Q_0 \rightarrow A = -Q_0 \qquad \text{ecs.6.27}$$

Que reemplazados en ecs.6.24 permiten obtener la carga en el capacitor en función del tiempo:

$$q(t) = -Q_0 \cos(\omega_0 t) \qquad \text{ecs.6.28}$$

Siendo la diferencia de potencial entre sus placas

$$v_C(t) = \frac{-Q_0}{C}\cos(\omega_0 t) \qquad \text{ecs.6.29}$$

La corriente por el circuito es la derivada respecto al tiempo de ecs.6.28

$$i(t) = \omega_0 Q_0 sen(\omega_0 t) \qquad \text{ecs.6.30}$$

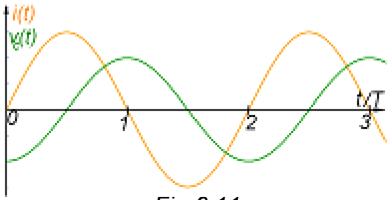


Fig.6.11

Los mismos resultados se tienen eligiendo B=180°.

Para obtener la pulsación ω_0 en función de los datos del circuito, se reemplaza en 6.23 $q(t)$ por la función obtenida en ecs.6.28:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad \text{ecs.6.31}$$

En la Fig.6.11 se grafica la variación en el tiempo de la diferencia de potencial en el capacitor y la corriente por el circuito. En fig.6.12 se esquematiza la situación para diferentes instantes en el primer semiciclo.

Inicialmente toda la energía se almacena en el campo eléctrico del capacitor. Al cerrar el circuito comienza la descarga del capacitor originando una corriente por la inductancia que comienza a establecer el campo magnético a su alrededor (fig.6.12b), la energía se reparte en ambos campos manteniéndose igual a la inicial en todo instante (ecs.6.34).

Cuando la tensión entre placas del capacitor se anula, la corriente por la inductancia alcanza su máximo valor indicando que la totalidad de la energía pasó al campo magnético.

Al no existir cargas en exceso en el capacitor que impulsen la corriente por el circuito, esta comienza a disminuir. La disminución del campo magnético induce un f.e.m. que trata de mantener el sentido de circulación de la corriente.

De esta manera, la placa inferior del capacitor comienza a tener exceso de carga positiva y la superior negativa, invirtiéndose el sentido del campo eléctrico.

Cuando el campo magnético agotó su energía, la corriente se anula permitiendo que el capacitor, en el que la tensión alcanzó nuevamente su

máxima valor con signo opuesto al anterior, comience a descargarse invirtiendo el sentido de la corriente al final de la primera mitad del ciclo.

Este mecanismo se vuelve a repetir en la segunda mitad del ciclo aunque los campos tienen sentido opuesto al anterior. De esta manera, dos veces por ciclo toda la energía está contenida en el campo eléctrico y otras dos en el magnético, aunque la mayoría del tiempo la energía se reparte entre ambas formas.

Para evaluar como es el reparto de energía se debe tener en cuenta que en el capacitor la energía almacenada en cada instante es proporcional al cuadrado de la diferencia de potencial en el mismo, mientras que la almacenada en la inductancia es proporcional al cuadrado de la corriente por ella.

$$u_C(t) = \frac{1}{2} C v_{(t)}^2 \qquad \text{ecs.6.32}$$

$$u_L(t) = \frac{1}{2} L i_{(t)}^2 \qquad \text{ecs.6.33}$$

Las expresiones 6.32 y 6.33 corresponden a la energía en el campo eléctrico del capacitor y campo magnético en la inductancia en un instante cualquiera t.

Reemplazando por las expresiones de la corriente y diferencia de potencial en las placas del capacitor, ecs.6.30 y 6.29 y utilizando el resultado de ecs.6.31, se comprueba que en cada instante, la energía en el circuito es igual a la inicial del sistema.

$$u_C(t) + u_L(t) = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} \qquad \text{ecs.6.34}$$

En un circuito LC con resistencia nula, las oscilaciones se mantienen indefinidamente repitiéndose cada T segundos, intervalo de tiempo denominado período.

$$i(t) = \omega_0 Q_0 sen\left(\omega_0(t+T)\right)$$

$$i(t) = \omega_0 Q_0 sen\left(\omega_0 t + 2\pi\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \text{ecs.6.35}$$

Se denomina frecuencia de la función al número de veces que se repite su forma en un segundo. Su unidad, c/s (ciclos/segundos), se denomina Hz (Hertz), siendo ω_0 (radianes/segundos) la frecuencia angular o pulsación.

$$f = \frac{1}{T} \quad (Hz) \qquad \text{ecs.6.36}$$

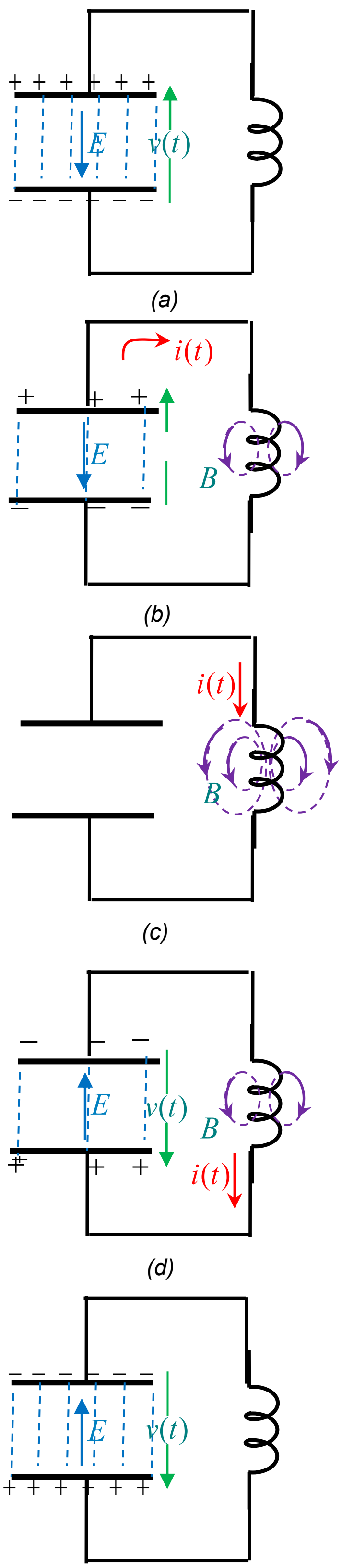


Fig.6.12

$$\omega_0 = 2\pi f \quad \left(\frac{rad}{s}\right)$$ *ecs.6.37*

Inicialmente la energía se encuentra almacenada en el campo eléctrico en el capacitor.

$$U_{inicial} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$ *ecs.6.38*

En un instante t cualquiera, la energía del campo eléctrico está expresada por ecs.6.32 mientras que ecs.6.33 se refiere a la energía en el campo magnético. Reemplazando en cada caso por la corriente y tensión en función del tiempo, se obtiene:

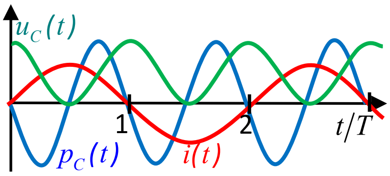


Fig.6.13

$$u_C(t) = \frac{1}{2}Cv_{(t)}^2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{Q_0}{C}\cos(\omega_0 t)\right)^2$$

$$u_C(t) = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2(\omega_0 t)$$ *ecs.6.39*

$$u_L(t) = \frac{1}{2}Li_{(t)}^2 = \frac{1}{2}L\left(\omega_0 Q_0 sen(\omega_0 t)\right)^2$$

$$u_L(t) = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}sen^2(\omega_0 t)$$ *ecs.6.40*

La rapidez con que se modifica la energía en cada caso se tiene tomando la derivada respecto al tiempo:

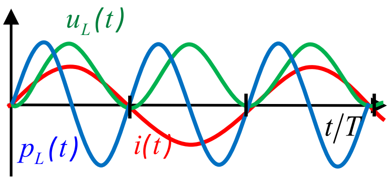


Fig.6.14

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{-1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\omega_0 sen(2\omega_0 t)$$ *ecs.6.41*

$$\frac{du_L(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\omega_0 sen(2\omega_0 t)$$ *ecs.6.42*

Estas expresiones se grafican en figs.6.13 y 6.14 junto con la corriente que es la misma en ambos casos, pudiéndose observar que dos veces por ciclo el campo eléctrico es el encargado de impulsar las cargas por el circuito entregando su energía que es recibida por el campo magnético. De igual forma, cuando es el campo magnético el encargado de impulsar la corriente, lo hace a expensas de una disminución de su energía que está siendo recibida por el campo eléctrico.

En este caso, en que se considera nula la resistencia en el circuito, la energía oscila permanentemente pasando de una forma a la otra como ocurre con un péndulo en que se intercambia la energía potencial con la cinética. La suma de ambas se mantiene constantemente igual a la inicial.

A modo de ejemplo, utilizando las ecs.6.41 y 6.42, se puede evaluar el reparto de energía para el primer cuarto de ciclo.

En el capacitor que se está descargando es:

$$u_C\big|_{T/4} = \int_0^{\pi/2} \frac{-1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\omega_0 sen(2\omega_0 t)dt = \frac{1}{4}\frac{Q_0^2}{C}$$

En ese intervalo de tiempo la corriente en la inductancia establece el campo magnético. La energía promedio en el campo magnético en ese intervalo resulta

$$u_L\Big|_{T/4} = \frac{1}{4}\frac{Q_0^2}{C}$$

La energía total es igual a la inicial.

De esta manera puede comprenderse que dos veces por ciclo el campo eléctrico entrega energía al magnético y, en forma alternada el magnético entrega energía al eléctrico.

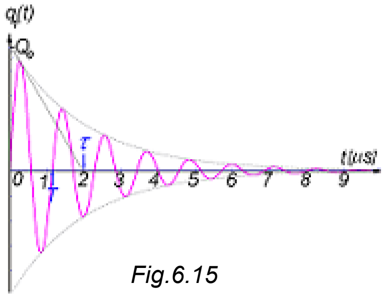


Fig.6.15

Respuesta libre de un circuito RLC

La fig.6.15 considera el agregado de una resistencia R en serie. En este caso la ecuación de segundo grado es:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q(t)}{LC}=0 \qquad \textit{ecs.6.43}$$

Siendo una solución:

$$q(t)=Q_0\, e^{-\frac{R}{2L}t}\, sen(\omega_0^{'} t) \qquad \textit{ecs.6.44}$$

$$\omega_1^2=\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \qquad R<2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \textit{ecs.6.45}$$

En este caso las oscilaciones se atenúan con constante de tiempo 2L/R. En la fig.6.15 se esquematiza la variación de la carga en función del tiempo considerando R=0,1 Ω, L=0,1 μ Hy y C=0,33 μ F. En estas condiciones, la frecuencia es de 873KHz, el periodo de 1,14 μ s y la constante de tiempo de 2 μ s de modo que luego de transcurridos cinco ciclos prácticamente toda la energía se transfirió al medio por disipación en la resistencia.

Circuitos multimodo

Los circuitos de una sola malla con elementos que pueden intercambiar ambos tipos de energía, eléctrica y magnética, responden con una frecuencia de oscilación única, de manera análoga al péndulo simple (fig.6.16a).

Para mantener las oscilaciones, aún cuando la resistencia del bobinado sea muy pequeña, de la misma manera que para mantener un columpio oscilando se debe dar un empujoncito en el instante adecuado, se necesitará entregar cierta cantidad adicional de energía en cada ciclo. Este el trabajo es realizado por un amplificador especialmente diseñado, recibiendo el conjunto el nombre de oscilador.

Esta es otra manera de obtener una tensión alterna, aunque en este caso, diferenciándose de los generadores considerados en el capítulo anterior, la potencia en juego es pequeña. Generalmente se utilizan como generadores de señales sinusoidales para ser utilizados para comandar diferentes equipos en experiencias de laboratorio.

Modificando L o C se consigue variar la frecuencia de la señal entregada, permitiendo ensayar circuitos en un amplio rango de frecuencias.

En la situación presentada en fig.6.16b, donde se agrega una segunda masa, existen dos formas o "modos" naturales de oscilación.

El primero se obtiene soltando a ambas masas cuando están alineadas y el segundo apartando una masa para cada lado antes de soltarlas (fig.6.16c), pudiendo demostrarse que, apartándolas de forma diferente a las mencionadas, el movimiento resultante será una combinación lineal de los dos modos naturales.

De igual forma, cuando en un circuito eléctrico existen dos o más mallas con las características mencionadas, los posibles modos de oscilación aumentan proporcionalmente al número de lazos con inductancias y capacidades. El circuito de fig.6.17 es un ejemplo en el que existen dos mallas con inductancias y capacidades, pudiéndose en este caso, determinar por simple inspección, sus modos naturales de oscilación.

Un modo de oscilación se tiene cuando inicialmente se cargan los capacitores de los extremos con igual cantidad de carga con polaridad opuesta. En estas condiciones, el intercambio de energía se realiza a través del lazo externo sin intervención del capacitor central.

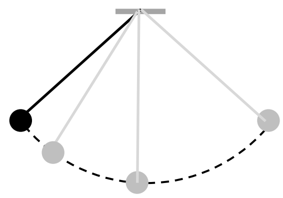
El segundo modo se tiene cuando el capacitor central tiene toda la carga inicial, descargándose en los otros dos. Como el circuito a ambos lados del capacitor central es el mismo, las corrientes en estos será la misma. Puede demostrarse que la frecuencia de este modo es $\sqrt{3}$ veces la del primer modo. Cualquier otra forma de excitación, como ser depositando inicialmente la carga en el capacitor central y en uno de los extremos (indicado en fig.6.17b como Ejemplo 3), o produciendo una variación de flujo magnético en una de las inductancias, la respuesta será del tipo:

$$i_1(t) = A_1 sen(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 sen(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \text{ecs.6.46}$$

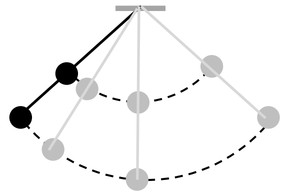
$$i_2(t) = B_1 sen(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 sen(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \text{ecs.6.47}$$

Siendo $i_1(t)$ e $i_2(t)$ las corrientes resultantes por las inductancias. Igualmente se pueden expresar las cargas, corrientes y potenciales en los diferentes componentes del circuito como una combinación lineal de funciones armónicas de ambas frecuencias.

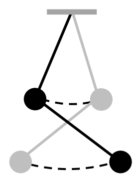
A modo de ejemplo, si nos detenemos en el comportamiento de la carga en cada capacitor, en el modo 1 el capacitor central permanecerá descargado todo el tiempo mientras que en los de los extremos las cargas oscilarán de la misma manera que el agua en una bandeja cuando subimos y bajamos suavemente sus extremos.



(a)

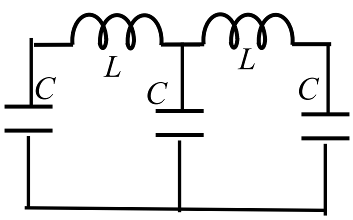


(b)

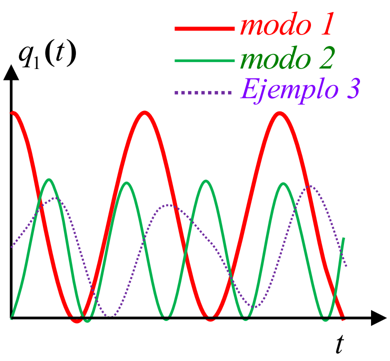


(c)

Fig.6.16



(a)

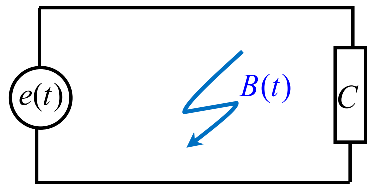


(b)

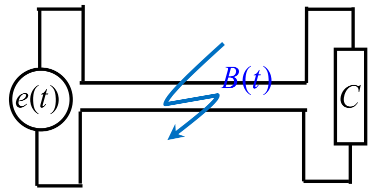
Fig.6.17

En el modo 2 también se tendrán oscilaciones alrededor de un mismo valor, aunque en este caso cuando la carga del capacitor central aumenta, la de los extremos disminuye.

Aumentando el número de lazos LC aumenta la cantidad de modos posibles. Dependiendo de las condiciones iniciales la respuesta obtenida será una combinación de oscilaciones, cada una con la frecuencia de un modo y amplitud dependiente del modo y de las condiciones iniciales. En fig.6.17 se representa en función del tiempo la carga (o el potencial) en uno de los capacitores para los tres casos considerados.



(a)



(b)

Fig.6.18

Línea de transmisión

Mediante dos hilos conductores es posible conectar un generador de f.e.m. con una carga. Como puede observarse en Fig6.18.a, cualquier campo magnético variable originado externamente al circuito inducirá una f.e.m. adicional que se superpone a la que se quiere utilizar interfiriendo con la misma. Para minimizar este efecto se debe reducir la superficie que subtiende el lazo que forma el circuito (fig.6.18.b). La capacidad e inductancia por unidad de longitud del par de alambres que forma la línea de transmisión dependerá de la forma en que se dispongan estos hilos, la cual a su vez depende de la aplicación. A modo de ejemplo se esquematiza una línea bifilar utilizada para conexión del televisor con la antena (fig.6.19.a), el par trenzado utilizado en las redes de área local cableadas (fig.6.19.b) y el cable coaxial de las conexiones de televisión por cable (fig.6.19.c).

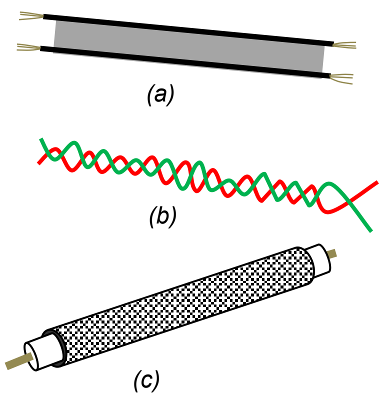
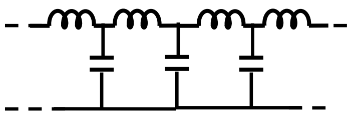

(a) (b) (c)

Fig.6.19

En el capítulo 3, donde se consideraron corrientes continuas, los campos magnéticos generados no se modifican en el tiempo de modo que no inducen f.e.m. alguna. Por este motivo, en los modelos de fig.3.6 y 3.7 no se utilizaron inductancias.

En fig.6.20 se muestra un modelo posible de línea utilizado cuando las corrientes varían en el tiempo.


Fig.6.20

Como se podrá comprender, existe una complicación adicional en la resolución de este tipo de circuitos cuando se tiene en cuenta la resistencia interviniente. Por este motivo, y considerando que normalmente es bajo el valor de la resistencia, para comprender el comportamiento de una línea de transmisión cuando se deposita cierta cantidad de carga en un extremo de la misma, solamente consideraremos la existencia de la inductancia y capacidad distribuida.

Como podrá comprenderse, existe una estrecha relación entre este modelo y los circuitos multimodo que comenzamos a tratar partiendo de una celda LC en la que en forma natural se produce un intercambio de energía entre los componentes a una frecuencia determinada por los valores de L y de C.

Agregando otras celdas, el número de modos aumentará en forma proporcional y colocando un exceso de cargas en un extremo, las cargas en los capacitores y corrientes por las inductancias comenzarán a oscilar excitando a las celdas vecinas hasta que, alcanzado el estado estacionario las diferentes partes oscilarán con la misma frecuencia aunque los mínimos y máximos generalmente ocurren en diferentes partes del circuito. En un caso real, la resistencia, aunque pequeña no será nula, produciendo una atenuación de las oscilaciones a medida que transcurren.

Los posibles modos de oscilación aumentan con el número de mallas y también los términos armónicos de diferente frecuencia que intervendrán en las funciones que representan a cada una de las magnitudes eléctricas oscilantes.

Es posible encontrar la forma en que se distribuyen las diferentes magnitudes eléctricas en una línea de transmisión, considerando un tramo de la misma de longitud Δx.

Indicando con ℓ y ς (sigma) a la inductancia y capacidad por unidad de longitud de la línea, en Hy/m y F/m respectivamente, la ecuación de la malla correspondiente al tramo a una distancia x del extremo de la línea es:

$$-\ell\Delta x\frac{\partial i(x)}{\partial t}=V(x+\Delta x)-V(x)$$

Donde $\ell\Delta x$ es la inductancia del tramo en la posición x.

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por Δx, en el límite, para $\Delta x\to 0$ se tiene:

$$-\ell\Delta x\frac{\partial i(x)}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x$$

Simplificando:

$$-\ell\frac{\partial i(x)}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \textit{ecs.6.48}$$

De la corriente que llega al nodo x, parte se deriva por el capacitor:

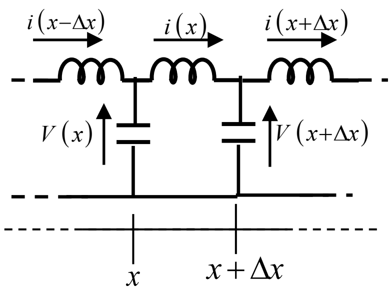


Fig.6.21

Existe infinidad de aplicaciones en las que se conecta un circuito eléctrico a una fuente de f.e.m. En muchas, la inductancia y capacidad de la línea utilizada no influyen en el resultado obtenido. En otras, estos parámetros deforman la tensión y corriente por el circuito, pudiendo llegar a anularlas completamente a determinadas frecuencias. Finalmente, otros tipos de aplicaciones se basan en los parámetros de la línea de transmisión utilizada, la que pasa a comportarse como otro componente del circuito. A los parámetros mencionados se debe agregar la resistencia por unidad de longitud del cable que tiene en cuenta, además de la resistencia óhmica del alambre utilizado, las pérdidas en el dieléctrico utilizado como soporte material de los alambres.

$$i(x-\Delta x) = C\frac{\partial V(x)}{\partial t} + i(x)$$

$$C\frac{\partial V(x)}{\partial t} = i(x-\Delta x) - i(x)$$

$$C\frac{\partial V(x)}{\partial t} = -\frac{\partial i(x)}{\partial x}\Delta x$$

$$\varsigma\frac{\partial V\left(x\right)}{\partial t} = -\frac{\partial i(x)}{\partial x}$$ *ecs.6.49*

Derivando respecto al tiempo:

$$\varsigma\frac{\partial^2 V(x)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i(x)}{\partial x}\right)$$

$$\varsigma\frac{\partial^2 V(x)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial i(x)}{\partial t}\right)$$

Reemplazando por ecs.6.48:

$$\varsigma\frac{\partial^2 V(x)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\ell}\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{1}{\ell}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\ell\varsigma}\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}$$ *ecs.6.50*

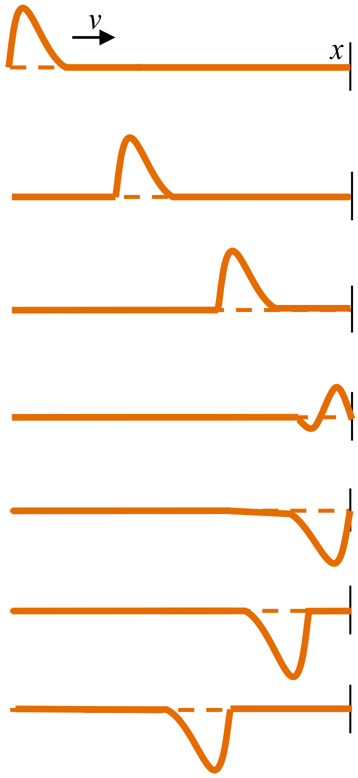


Fig.6.22

Como la carga en cada punto presenta el mismo tipo de variación que el potencial, esta expresión también es válida para la distribución de carga eléctrica en la línea:

$$\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\ell\varsigma}\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}$$

Operando de la misma manera, a partir de la primera de las ecuaciones, se llega a:

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\ell\varsigma}\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2}$$

Todas estas ecuaciones corresponden a ondas propagándose en dirección de la línea. Puede comprobarse fácilmente que una función $f(x \pm vt)$ es solución de esta ecuación.

Tomando las derivadas correspondientes y reemplazando se encuentra que en este caso la velocidad de propagación de la onda resulta:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\ell\varsigma}}$$ *ecs.6.51*

En la actualidad, casi el 90% de las comunicaciones se realiza mediante cables submarinos, con manojos de fibra óptica en su interior donde las frecuencias utilizadas son muy superiores a las correspondientes al tipo de línea considerado en este capítulo, permitiendo enviar mayor cantidad de información en el mismo intervalo de tiempo.

En fig.6.22 se representa una función cualquiera $f(x - vt)$ que en el instante inicial, t=0 toma la forma f(x) y avanza con velocidad v en el sentido positivo de este eje. Si el argumento de la función es $(x + vt)$ a medida que transcurre el tiempo la forma avanza en dirección negativa del eje x.

Para comprender el significado de las ondas de magnitudes eléctricas a lo largo de la línea, podemos recurrir a la analogía con las ondas en una cuerda. Fijando el extremo de una larga cuerda, cuando pegamos un tirón en el otro, la cuerda se deforma y esta deformación viaja por la cuerda hasta llegar al extremo fijo donde se refleja volviendo hacia atrás. Ambas formas, la incidente y reflejada se superponen reduciéndose hasta desaparecer si no continuamos perturbando el extremo libre. En su avance a lo largo de la cuerda, cada punto de la misma sube y baja vibrando alrededor de su posición sin avanzar en el sentido de la cuerda. La forma de la perturbación es la que "viaja" a lo largo de la cuerda.

De la misma manera, en una línea de transmisión, tal como se pudo comprobar, las cargas, potenciales y corrientes reciben información de los cambios en algún lugar de la línea a la velocidad correspondiente a la ecs.6.51.

Para tener idea de la magnitud de esta velocidad, consideremos una línea formada por dos cilindros coaxiales de radios a y b, a<b, separados por un aislante de constante dieléctrica κ_e.

En este caso la inductancia y capacidad por unidad de longitud se pueden expresar de la siguiente manera:

$$l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \left(\frac{H_y}{m}\right) \qquad \textit{ecs.6.52}$$

$$\varsigma = \frac{2\pi\kappa_e\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad \left(\frac{F}{m}\right) \qquad \textit{ecs.6.53}$$

Resultando la velocidad de propagación:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\kappa_e\varepsilon_0}} \qquad \textit{ecs.6.54}$$

Como se verá esta expresión se relaciona con la velocidad de la luz en el vacío, indicada con la letra c.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3x10^8 \left(\frac{m}{s}\right) \qquad \textit{ecs.6.55}$$

De esta manera, la velocidad de propagación en la línea será:

En este capítulo comprobamos que al perturbar un circuito eléctrico compuesto por inductancias y capacidades, las magnitudes eléctricas responden de acuerdo a una función armónica cuya frecuencia se relaciona con el valor de estos componentes. Dependiendo del circuito y de la forma en que se produzca la perturbación inicial, la respuesta podrá expresarse mediante una función armónica con una frecuencia particular o "modo de oscilación", existiendo tantos modos posibles como lazos LC contenga el circuito.

Muchas veces la manera en que se excita al circuito produce una respuesta del mismo que no se puede expresar por una sola frecuencia debiéndose recurrir a la suma de funciones armónicas de amplitud diferente y frecuencias correspondientes a los diferentes modos posibles para dicho circuito.

Debido a la resistencia, presente en todas las situaciones, las oscilaciones se atenúan a medida que transcurre el tiempo hasta desaparecer siendo necesario para mantenerlas, entregar cierta cantidad de energía en el momento adecuado.

$$v = \frac{c}{\sqrt{\kappa_e}} \qquad \textit{ecs.6.56}$$

En el circuito de fig.6.17, el exceso de cargas depositado en uno de los capacitores inicia las oscilaciones que se manifiestan en el resto del circuito. De manera similar, cuando se deposita un exceso de carga eléctrica en un extremo de la línea, esta perturbación viaja a lo largo de la misma. En cada punto las cargas oscilarán alrededor de su posición de equilibrio sin avanzar en el sentido de la línea de transmisión. Lo mismo sucede con las corrientes. Tal como se trató en el capítulo 3, la velocidad promedio con la que los electrones se mueven en el mismo sentido en un alambre es del orden del mm/s mientras que, como acabamos de comprobar, la velocidad con que se propaga la perturbación es extremadamente alta.

Nuevamente, la explicación la brinda la teoría de campo, pudiéndose adelantar el resultado: la perturbación inicial origina una onda de campos electromagnéticos que avanzan guiados por la línea a la velocidad establecida por ecs.6.56. Esta onda es la responsable de la vibración en cada punto de las cargas o, en el caso del establecimiento de una corriente continua, de depositar las cargas superficiales origen del campo eléctrico en el interior del alambre.

A modo de ejemplo, en un cable coaxial con polietileno como dieléctrico, con $\varepsilon = 2,25\ \varepsilon_0$ y $\mu \simeq \mu_0$ la velocidad de propagación de la información es del orden de $2x10^8\ m/s$. En un cable de 5000 km de longitud, un extremo se entera de un cambio en el potencial en el otro extremo después de transcurridos 25 ms. Como cambio en un extremo se entiende desde la conexión y desconexión de una tensión continua para encender y apagar una lámpara hasta el envío de pulsos con una codificación preestablecida permitiendo entablar diálogos. Por este motivo, una década antes de que se conociera la existencia de las ondas electromagnéticas y que las mismas pueden propagarse aún en el vacío, se realizaron las primeras transmisiones para servicio de telegrafía a través de cables coaxiales submarinos, uniendo el continente americano con Europa. Medio siglo más tarde comenzarían las transmisiones inalámbricas de radio.

En el próximo capítulo comenzaremos a tratar la respuesta de circuitos alimentados mediante una fuente de tensión variable en el tiempo, denominada respuesta "forzada" para diferenciarla de la respuesta libre tratada en este capítulo.

Debido a que la respuesta libre de estos circuitos se puede expresar mediante funciones armónicas, a la facilidad de operación entre estas y principalmente y que se pueden generar tensiones sinusoidales convirtiendo diferentes formas de energía en eléctrica, consideraremos los circuitos alimentados con funciones seno o coseno, conocidos bajo el nombre de circuitos de corriente alterna.

ACTIVIDADES

6.1) En el circuito de fig.6.23 se cierra el interruptor y una vez alcanzado el estado estacionario se vuelve a abrir.

a) Por simple inspección calcule las constantes de tiempo de carga y descarga.

b) Teniendo en cuenta los resultados de tabla 6.1 determine el valor de la corriente por la capacidad inmediatamente después de cerrada la llave y la carga almacenada una vez que se alcanza el estado estacionario correspondiente.

c) Repita b) considerando la apertura del interruptor.

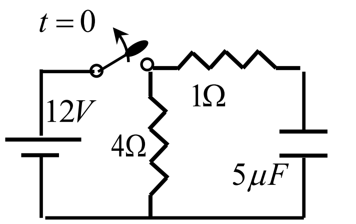


Fig.6.23

6.2) Repita el ejercicio anterior para el circuito de fig.6.24 considerando los resultados de Tabla 5.1. Para el inciso b determine la f.e.m. inducida inmediatamente después de cerrada la llave y la corriente por la inductancia en estado estacionario.

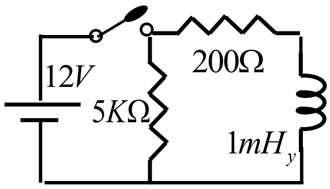


Fig.6.24

6.3) a) Utilice los valores encontrados en los ejercicios anteriores para graficar en función del tiempo la corriente por el capacitor y f.e.m. en la inductancia.

¿Encuentra alguna característica común para ambas representaciones? Explique.

b) Repita el inciso anterior para la tensión entre placas del capacitor y corriente por la inductancia .

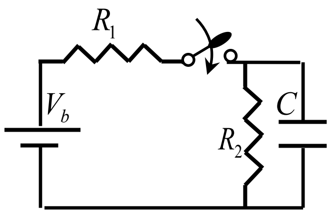


Fig.6.25

6.4) a) En el circuito de fig.6.25, antes del cierre de la llave no hay carga almacenada en el capacitor. Exprese en función de las variables indicadas en la figura, las corrientes por las resistencias y capacidad para el instante posterior al cierre del interruptor.

b) Repita a) una vez alcanzado el estado estacionario.

c) Demuestre que el capacitor se carga con constante de tiempo igual al producto entre la capacidad y el paralelo de las resistencias.

6.5) Repita el ejercicio anterior para el circuito de fig.6.26.

6.4.c) Muchas veces, la resolución de circuitos eléctricos no es tan simple como sucede con las situaciones presentadas en los ejercicios anteriores. Un simple cambio puede complicar la resolución.

Escriba las ecuaciones de malla y nodos. En la correspondiente al lazo que contiene la resistencia y capacitor en paralelo tendrá un término en que aparece la corriente por la resistencia y otro en función de la carga en el capacitor. Tomando la derivada respecto al tiempo en ambos miembros tendrá la expresión en función de las corrientes. Esta, junto con la ecuación de la otra malla y la del nodo, le permitirán resolver el circuito.

6.6) a) Realice una comparación entre los resultados obtenidos en los dos ejercicios anteriores respecto al comportamiento de la fuente de tensión ante cambios en el circuito.

b) Suponiendo que la fuente de tensión es una pila o batería, las placas de la misma se comportan como una capacidad de gran valor ¿concuerda esta suposición con los resultados obtenidos en a)?

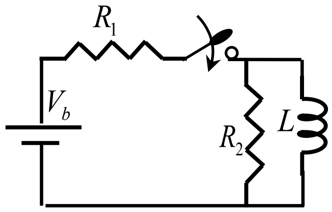


Fig.6.26

6.7) Se carga un capacitor de 4,7 μF conectándolo a una fuente de 12 V. En paralelo con el capacitor se conecta un voltímetro de 10 $M\Omega$ de resistencia interna. A partir del instante en que se desconecta la fuente la indicación del voltímetro disminuye a medida que transcurre el tiempo. Los valores medidos cada diez segundos, en voltios, son:

$v(10) = 9,46$

$v(20) = 7,45$

$v(30) = 5,87$

$v(40) = 4,63$

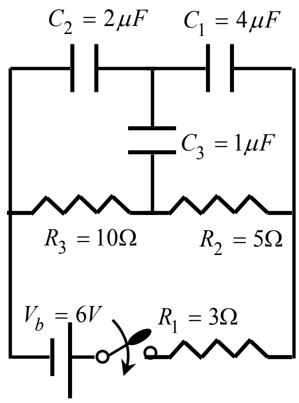


Fig.6.27

a) Considere una resistencia en paralelo con el capacitor inicialmente cargado a una tensión de valor conocido y obtenga la expresión de la tensión entre placas en función del tiempo.

b) Utilice el resultado obtenido en a) para expresar el tiempo en función de los valores medidos. La representación de los mismos en función del tiempo es una recta cuya pendiente se relaciona con la constante de tiempo del circuito. Utilice este método para determinar dicha constante de tiempo.

c) Compare el valor obtenido con el que tendría si solamente interviene en la descarga la resistencia del instrumento. Adjudicando esta diferencia a la resistencia de fuga en el capacitor, realice un cálculo estimativo de la misma.

6.8) a) Resuelva el circuito de fig.3.54 a partir del instante en que se conecta la fuente de tensión y exprese la tensión medida en función del tiempo. El problema 3.25 se refiere al valor indicado por el voltímetro una vez alcanzado el estado estacionario. Compárelo con el resultado de a) para $t \to \infty$.

b) Suponiendo que se alcanza el estado estacionario después de diez veces la constante de tiempo del circuito, determine el tiempo que debe transcurrir desde la conexión de la fuente, para efectuar esta medida. Utilice los datos y valor calculado para la resistencia de fuga en el ejercicio 6.7.

6.9) a) Determine las corrientes por las resistencias y cargas en las capacidades del circuito de fig.6.27 para:

a1) El instante posterior al cierre del interruptor.

a2) Una vez alcanzado el estado estacionario.

b) Calcule la constante de tiempo con que se descargan los capacitores al abrir nuevamente el interruptor.

6.9b) Debido al valor elegido para los componentes, el capacitor C3 permanece descargado sin intervenir en la carga y descarga de los otros dos. Resuelva el transitorio de descarga sin considerar a este capacitor y utilice los resultados obtenidos para verificar que realmente la diferencia de potencial entre los puntos correspondientes es nula.

6.10) Considere el inductor de fig6.28 representado mediante una inductancia de 0,5Hy en serie con una resistencia de $3\,\Omega$, que se conecta a una tensión continua de 30 V.

a) Calcule la corriente de estado estacionario y la energía almacenada en el campo magnético.

b) Suponiendo $R_1 = 10k\Omega$, calcule la diferencia de potencial entre los puntos indicados con A y B, inmediatamente después de la apertura del interruptor. ¿Qué cantidad de energía se habrá disipado en este resistor una vez que finalice el transitorio de descarga? Analice dónde se disipará la energía si no se coloca este resistor.

c) En fig.6.28b se agrega un circuito utilizado para absorber la energía del campo magnético cuando se interrumpe el circuito. ($R_2 = 33\Omega$, $C = 4,7\mu F$).

Derivando respecto al tiempo ambos miembros de la ecuación de malla del circuito obtenida a partir del instante en que se abre el interruptor, se comprueba que la corriente responde de manera similar a la ecs.6.44.

Calcule el período de oscilación y la constante de tiempo correspondiente y utilice estos valores para calcular el número de ciclos que se producen durante el transcurso de una constante de tiempo.

d) Calcule la amplitud de $V_B - V_A$ para los diez primeros ciclos y grafíquelos en función del tiempo.

e) Para la fig.6.28a. grafique $V_B - V_A$ en función del tiempo y compare con la grafica del inciso anterior.

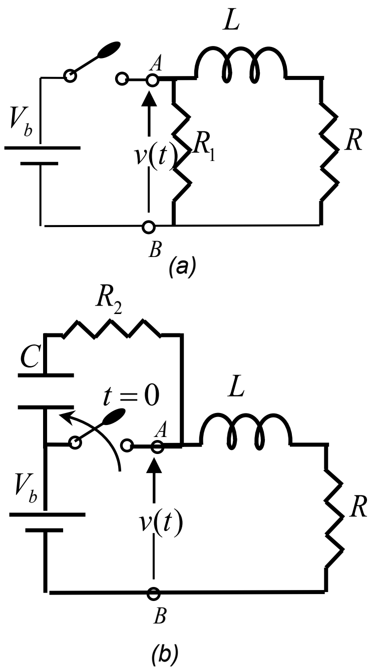


Fig.6.28

6.11) En el circuito de fig.6.29 C_1 está cargado inicialmente con carga Q_0 y los demás descargados, no existiendo campo magnético almacenado en las inductancias.

a) Encuentre la expresión en función del tiempo para la carga sobre C_1 a partir del instante en que se cierra la llave suponiendo que $C_1 = C_2 = C$ y $L_1 = L_2 = L$.

b) Encuentre la expresión de la frecuencia de oscilación f_1 en función de L y C.

c) Se modifica alguna de las respuestas anteriores agregando un capacitor entre los puntos A y B?

Justifique su respuesta si es afirmativa, en caso contrario calcule en función de Q_0, la carga sobre $C_3 = C$.

d) Grafique en función del tiempo la tensión en cada capacitor.

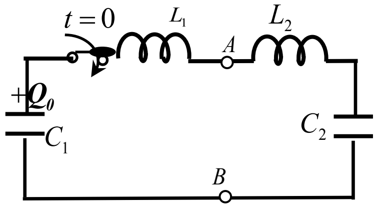


Fig.6.29

6.11) El circuito corresponde al modo 1 de fig.6.16. Para resolverlo considere

$$V_A(t) - V_B(t) = cte = V$$

6.12) a) Repita el inciso a del ejercicio anterior para el caso en que la carga se deposita en el capacitor del centro (fig.6.30).

b) Exprese la frecuencia de oscilación f_2 en función de f_1.

c) Grafique en función del tiempo la tensión en cada capacitor.

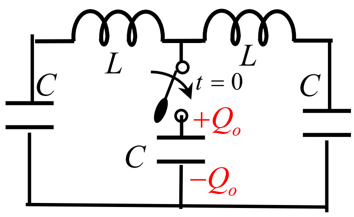


Fig.6.30

6.13) En el circuito de fig.6.31, $V1=10V$, $V2=3V$, $R1 = 10\Omega$, $R2 = R3 = 5\Omega$, $R4 = 15\Omega$ y $L = 35mHy$.

a) Calcule el valor de la corriente por la inductancia considerando que el interruptor $\ell\ell$ está abierto y el circuito en estado estacionario.

b) Calcule la f.e.m. inducida en L inmediatamente después de cerrar $\ell\ell$.

c) Repita a) para el nuevo estado estacionario.

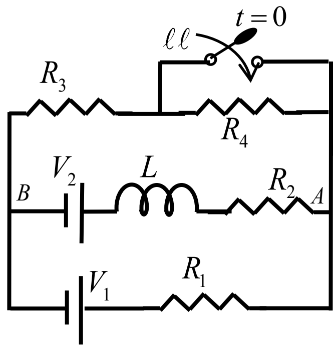


Fig.6.31

6.14) a) A partir del cierre de $\ell\ell$, exprese en función del tiempo la corriente por la inductancia del ejercicio anterior.

Verifique el resultado obtenido comprobando $V_A - V_B$ para diferentes lazos.

b) Expresando la constante de tiempo en función de L y las R intervinientes podrá predecir la correspondiente a la apertura del interruptor. Determine su valor.

CAPITULO 7

CORRIENTE ALTERNA

Cuando un circuito formado por resistencias, inductancias y capacidades se aparta de su estado de funcionamiento, las magnitudes eléctricas intervinientes se modifican hasta alcanzar un nuevo estado en que el que adquieren un valor constante o, si varían en el tiempo, esas variaciones se repiten en intervalos regulares sin modificarse, denominándose a esta condición "estado estacionario".

En el capítulo 3 se consideró el estado estacionario de corriente continua mientras que los capítulos 5 y 6 se refieren al intervalo de tiempo que transcurre desde que se produce una modificación hasta que se alcanza el régimen estacionario en corriente continua. Como se pudo comprobar, cuando existen inductancias y capacidades es posible que existan oscilaciones que se amortiguan debido a la resistencia del circuito.

Cualquier función continua en el tiempo puede ser utilizada para excitar un circuito. Hasta aquí se consideraron dos de estas posibilidades.

Una de ellas es la función constante o "continua" utilizada para describir el estado estacionario en corriente continua y la otra es la función escalón, denominación utilizada para expresar una modificación repentina en un circuito como es la aplicación de una tensión al mismo, tratada al considerar el régimen transitorio de corriente continua.

Cuando las funciones de excitación de un circuito varían en el tiempo puede ocurrir que se repitan en intervalos regulares o no. Las primeras reciben el nombre de funciones periódicas mientras que las segundas son aperiódicas.

Pasado el transitorio después de la conexión de una fuente de tensión periódicamente variable en el tiempo, la respuesta del circuito conectado será combinación de su respuesta natural y la que está tratando de imponer la fuente, conocida con el nombre de "respuesta forzada". En el capítulo anterior comprobamos que un circuito RLC, de manera natural responde armónicamente. Como la suma de funciones armónicas también es armónica, la respuesta de los circuitos excitados con este tipo de funciones, también resulta una función armónica.

Teniendo en cuenta que las aplicaciones más comunes en las que intervienen circuitos eléctricos se relacionan con energía obtenida de la red domiciliaria de distribución de electricidad, en los que las tensiones aplicadas varían armónicamente, en este capítulo se tratan los principios básicos de resolución de circuitos simples con esta excitación, denominados circuitos de corriente alterna.

Circuitos con corriente alterna

Al considerar excitaciones variables en el tiempo, además de la oposición a la circulación de corriente que ofrece la parte resistiva de un circuito, se debe tener en cuenta la inercia al cambio en la corriente ejercida por una inductancia y al cambio en la diferencia de potencial en placas de un capacitor.

Cuando las excitaciones varían armónicamente, las corrientes originadas también responden a este tipo de variación. Por este motivo, la resolución de circuitos se simplifica notablemente.

Para encontrar la relación entre excitación y respuesta, se considerará que la diferencia de potencial en extremos del circuito responde de la forma indicada en la ecs.7.1.

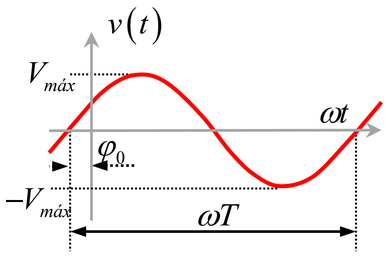


Fig.7.1

$$v(t) = V_{máx} sen\left(\omega t + \varphi_0\right) \qquad \textit{ecs.7.1}$$

Siendo φ_0 un valor constante relacionado con el instante en que se comienza a computar el tiempo.

Sincronizando el inicio del cronometraje con la variación sinusoidal, la fase inicial es igual a cero.

Debido a que ecs.7.1 es una función periódica, se define el período y frecuencia según las ecs.6.35 y ecs.6.36.

Por tratarse además de una función armónica, se trabaja también con la frecuencia angular definida en ecs.6.37.

En ecs.7.2 se expresa la relación entre estas magnitudes.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad \textit{ecs.7.2}$$

Debe tenerse en cuenta que estas magnitudes las impone el generador al que se conecta el circuito, pudiendo diferir de las correspondientes a la respuesta natural de oscilación del mismo tratada en el capítulo anterior.

En ecs.7.1 $V_{máx}$ se denomina amplitud o valor pico, de tensión en este caso, fijando los límites de variación de la función $v(t)$ entre $+V_{máx}$ y $-V_{máx}$ (fig.7.1).

Cuando se trata de funciones armónicas, la amplitud, frecuencia y fase inicial la definen completamente.

Esta característica permite aplicar diferentes métodos para la resolución de circuitos, siendo uno de ellos el basado en la representación fasorial, tratado en este capítulo.

Energía activa y energía reactiva

Componentes disipativos

La circulación de una corriente continua a través de una resistencia origina una caída de potencial eléctrico que se traduce en transferencia de energía eléctrica al medio ambiente en forma de calor. El origen de este aumento de temperatura se puede explicar utilizando el modelo de conductor de fig.1.6, argumentando que el campo eléctrico establecido actúa sobre los portadores libres de carga. Por este motivo, el movimiento al azar de los electrones libres tendrá una componente adicional en dirección del campo que desvía las trayectorias, amentando las colisiones con átomos de la red y en definitiva, cediendo energía a la misma.

Debido a que la velocidad promedio de avance de los electrones en el sentido de la corriente es insignificante frente a la elevada velocidad de desplazamiento al azar de los mismos, el aumento de colisiones y la correspondiente sobreelevación de temperatura ocurre independientemente de que el campo eléctrico en el medio conductor sea constante o se modifique en el tiempo, pudiéndose asegurar que en una resistencia existe disipación de energía, independientemente de las variaciones en el tiempo de la corriente que la atraviesa.

La transferencia de energía al medio puede realizarse en forma de calor o en otras formas de energía. En un motor eléctrico, por ejemplo, parte de la energía eléctrica entregada permite la realización de un trabajo mecánico y su efecto para la fuente que provee dicha energía es el mismo que si se tratara de una simple resistencia.

El término "disipación de energía en una resistencia" se utiliza para indicar que determinada cantidad de energía se utilizó para realizar una actividad como puede ser calentar agua.

El trabajo por unidad de tiempo realizado por una fuente de tensión al imponer una corriente en un dispositivo que permite elevar una carga, realizar un corte, perforación, emitir un mensaje de radiofrecuencia o cualquier otra actividad, es el mismo que haría si se reemplaza a dicho dispositivo por una resistencia que disipe la misma la misma cantidad de energía por unidad de tiempo, o resistencia equivalente. Por este motivo se utiliza la denominación de potencia activa para indicar la energía por unidad de tiempo disipada en una resistencia.

Componentes reactivos

Al estudiar la respuesta libre de un circuito en el que existen inductancias y capacidades, se pudo comprobar que existe un intercambio entre la energía en los campos eléctrico y magnético sin realizarse trabajo alguno.

Similarmente, al conectar una inductancia o capacidad a una fuente en que la tensión aplicada es una función del tiempo, estos componentes "reaccionan" ante cambios en la corriente o tensión en ellos intercambiando energía con la fuente de tensión. De esta manera, existe determinada cantidad de energía que fluye desde la fuente al circuito y desde éste hacia la fuente sin realizar trabajo, conocida con el nombre de energía reactiva.

Cuando se conecta una inductancia o una capacidad a una fuente de tensión continua, esta debe realizar trabajo para establecer el campo, magnético o eléctrico según el caso, el que es devuelto en la descarga. Similarmente, en circuitos con corrientes variables en el tiempo, la energía necesaria para producir los campos es devuelta al generador cuando desaparecen los campos.

Comportamiento de componentes individuales en corriente alterna.

Resistencia

La relación entre la corriente a través de la resistencia y la caída de potencial en la misma, expresada mediante la ley de Ohm, es válida para cualquier instante de tiempo.

$$v_R(t) = i(t)R \qquad \textit{ecs.7.3}$$

Donde v_R representa la caída de potencial en la resistencia.

Expresando la tensión aplicada al circuito de fig7.2 mediante la ecs.7.1, resulta:

$$v_R(t) = v(t) = V_{máx}sen(\omega t) \qquad \textit{ecs.7.4}$$

En la que se considera nula a la fase inicial, resultando para la corriente:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = I_{máx}sen(\omega t) \qquad \textit{ecs.7.5}$$

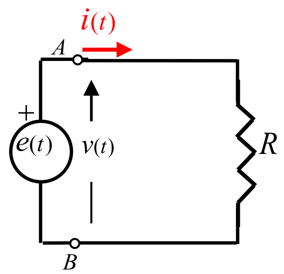


Fig.7.2

Donde la amplitud de la corriente por el circuito se relaciona con la amplitud de tensión sobre la resistencia de la siguiente manera:

$$I_{máx} = \frac{V_{máx}}{R} \qquad \textit{ecs.7.6}$$

En un circuito puramente resistivo la caída de potencial y corriente por la resistencia están en fase todo el tiempo. Por este motivo, la tensión y corriente tienen continuamente el mismo signo. Cuando son ambas positivas, la corriente sale de la fuente que está entregando energía al circuito. Al invertirse la polaridad, la fuente entrega corriente en sentido opuesto al anterior. El resultado es que en ambos casos entrega energía al circuito (fig.7.3).

La velocidad con que se disipa energía en la resistencia, o potencia disipada resulta:

$$p(t) = i(t)v_R(t)$$

$$p(t) = i^2(t)R = \frac{v_R^2(t)}{R} \qquad \textit{ecs.7.7}$$

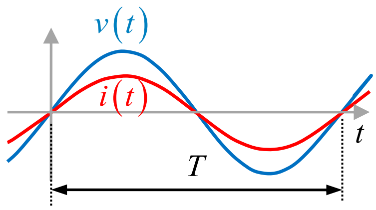
La energía disipada después de transcurrido un tiempo t desde que se aplicó tensión a la resistencia será:

$$u(t) = \int_0^t p(t)dt = \frac{V_{máx}^2}{R}\int_0^t sen^2(\omega t)dt$$

$$u(t)=\frac{V_{máx}^{2}}{R}\int_{0}^{t}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt \qquad \text{ecs.7.8}$$

A los efectos de realizar una comparación, interesa conocer el valor de una corriente continua que, durante determinado intervalo de tiempo, provoca sobre una resistencia la misma disipación de energía que la corriente periódicamente variable en el tiempo.

El intervalo de tiempo considerado es el tiempo de un periodo. Este valor equivalente de corriente continua se conoce el nombre de valor eficaz de la corriente periódicamente variable en el tiempo.



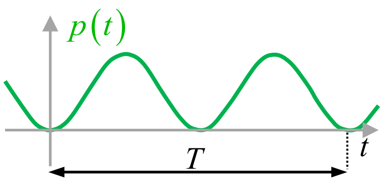
(a)

$$I_{ef}^{2}R.T=\int_{0}^{T}i(t)^{2}Rdt \qquad \text{ecs.7.9}$$

Resultando:

$$I_{ef}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}i(t)^{2}dt} \qquad \text{ecs.7.10}$$

Siendo esta la expresión que permite calcular el valor eficaz o valor cuadrático medio (R.M.S) de una función periódica $i(t)$.



(b)

Fig.7.3

Cuando $i(t)$ varía armónicamente con período T y amplitud I_0, la relación entre amplitud y valor eficaz de la función resulta:

$$I_{ef}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}I_{máx}^{2}sen^{2}(\omega t)dt}$$

$$I_{ef}=\frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} \qquad \text{ecs.7.11}$$

Inductancia

En la Fig.7.4 se muestra una inductancia en la que no se tiene en cuenta la resistencia del bobinado ni la resistencia interna del generador. Si además no existen capacidades, la ecuación de malla se reduce al término de f.e.m.:

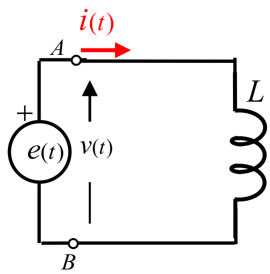


Fig.7.4

$$e(t)-L\frac{di}{dt}=0 \qquad \text{ecs.7.12}$$

En las condiciones mencionadas, la tensión en extremos del inductor es igual a la f.e.m. del generador.

$$e(t)=v(t)=V_{máx}sen(\omega t) \qquad \text{ecs.7.13}$$

De 7.12 y 7.13 se obtiene

$$i(t)=\frac{V_{máx}}{L}\int sen(\omega t)dt=-\frac{V_{máx}}{\omega L}cos(\omega t)$$

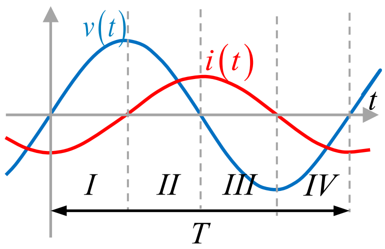
$$i(t)=-I_{máx}cos(\omega t)$$ *ecs.7.14*

Se denomina reactancia inductiva a la relación entre la amplitud de tensión aplicada a la inductancia y la amplitud de la corriente resultante en la misma. Igual que la resistencia, su unidad es el Ohm y representa la oposición ofrecida por la inductancia a la circulación de una corriente alterna.

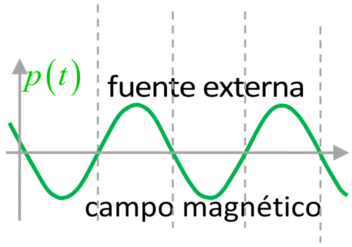
$$X_L=\frac{V_{máx}}{I_{máx}}=\omega L \quad (\Omega)$$ *ecs.7.15*

En un circuito en el que solo existe inductancia, la corriente está atrasada un cuarto de periodo respecto de la tensión aplicada. Por este motivo, junto con la ecs.7.15 que representa la magnitud de la reactancia inductiva, se debe tener en cuenta que la misma introduce un atraso de 90º de la corriente con respecto a la tensión.

En la fig.7.5a se puede comprobar que en los intervalos de tiempo indicados con II y IV la corriente y tensión tienen el mismo signo siendo la fuente la que entrega energía al circuito mientras que en I y III, al tener signos opuestos, la energía ingresa a la fuente. De esta manera, en un circuito inductivo puro, la fuente entrega energía para establecer el campo magnético en la inductancia que es devuelta al generador en el intervalo siguiente, produciéndose este intercambio de energía dos veces en cada ciclo.



(a)



(b)

Fig.7.5

Valores positivos corresponden a potencia entregada por la fuente de tensión mientras que en los negativos, es devuelta a la misma.

Para un instante cualquiera t a partir de la conexión de la fuente de tensión, se puede tomar un intervalo Δt suficientemente pequeño para depreciar las variaciones en la corriente por la inductancia y en la f.e.m. inducida. En estas condiciones, el trabajo que realiza la fuente en contra de la f.e.m. para imponer la corriente es:

$$\Delta W=-e_{ind}(t).\Delta q=-e_{ind}(t).i(t)\Delta t$$

Siendo la potencia absorbida por la inductancia:

$$p(t)=\frac{\Delta W}{\Delta t}=-e_{ind}(t).i(t)=Li(t)\frac{di(t)}{dt}$$

De ecs.7.14 y 7.15, se obtiene:

$$p(t)=\frac{-1}{2}\frac{V_{máx}^2}{\omega L}sen(2\omega t)$$ *ecs.7.16*

Esta expresión toma valores positivos cuando la fuente entrega energía estableciendo el campo magnético. Su valor es negativo cuando la energía en el campo magnético es devuelta a la fuente (fig.7.5).

Capacidad

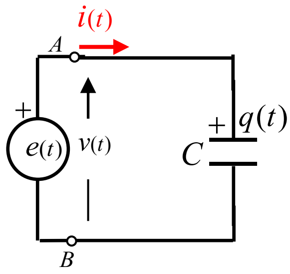


Fig.7.6

Cuando se conecta una capacidad en paralelo con una fuente de tensión la ecuación del lazo formado es:

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} \qquad \text{ecs.7.17}$$

Resultando la corriente:

$$i(t) = C\frac{dV}{dt}$$

Derivando respecto del tiempo la ecs.7.1 se obtiene la relación entre la corriente y la tensión aplicada:

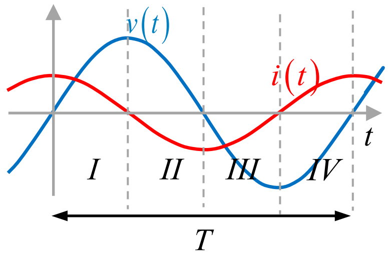
$$i(t) = \omega C V_{máx} cos(\omega t) \qquad \text{ecs.7.18}$$

Pudiéndose expresar como:

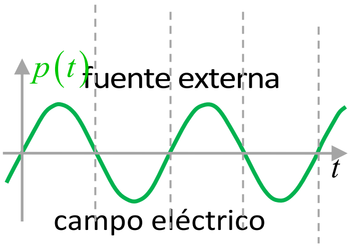
$$i(t) = I_{máx}\cos(\omega t) \qquad \text{ecs.7.19}$$

En este caso la corriente adelanta 90º respecto a la tensión aplicada y la relación entre amplitudes se denomina reactancia capacitiva.

$$X_C = \frac{V_{máx}}{I_{máx}} = \frac{1}{\omega C} \qquad (\Omega) \qquad \text{ecs.7.20}$$



(a)



(b)

Fig.7.7

Como en el caso anterior, el intercambio energético entre el generador y la capacidad se realiza dos veces por ciclo.

Cuando la corriente y tensión tienen igual signo el generador realiza trabajo para establecer el campo eléctrico mientras que cuando el signo de estas magnitudes es diferente es el campo el impulsa las cargas por el circuito.

Circuito RLC serie

En fig.7.8 se esquematiza la conexión serie de los elementos de circuito. Debido a que en este tipo de conexión circula la misma corriente por todos los componentes, se hace coincidir el instante a partir del cual comienza la toma de tiempos con el inicio de un ciclo de corriente. A partir de esta elección se debe determinar la diferencia de fase entre la tensión y corriente.

$$i(t) = I_{máx} sen(\omega t) \qquad \text{ecs.7.21}$$

$$v(t) = V_{máx} sen(\omega t + \varphi) \qquad \text{ecs.7.22}$$

Recorriendo la malla en el sentido indicado por la flecha:

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} + L\frac{di(t)}{dt} + i(t)R$$ *ecs.7.23*

Utilizando la relación entre carga y corriente junto con la ecs.7.21:

$$q(t) = \int I_{máx} sen(\omega t)\,dt = \frac{-I_{máx}}{\omega}\cos(\omega t)$$

Teniendo en cuenta ecs.7.22 y ecs7.23, resulta:

$$V_{máx} sen(\omega t + \varphi) = I_{máx} R sen(\omega t) + I_{máx}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos(\omega t)$$

ecs.7.24

Recurriendo a la expresión del seno de la suma de dos ángulos:

$$V_{máx} sen(\omega t + \varphi) = V_{máx} sen(\omega t)\cos(\varphi) + V_{máx}\cos(\omega t) sen(\varphi)$$

Considerando que ecs.7.24 es válida para cualquier instante de tiempo, se obtiene:

$$V_{máx}\cos(\varphi) = I_{máx} R$$ *ecs.7.25*

$$V_{máx} sen(\varphi) = I_{máx}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$ *ecs.7.26*

Que resultan independientes del tiempo. De la relación entre ecs.7.26 con ecs.7.25 se obtiene el desfasaje buscado.

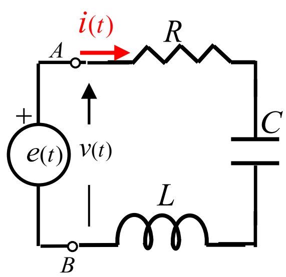


Fig.7.8

$$tg(\varphi) = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$ *ecs.7.27*

Para hallar la relación entre la amplitud de la tensión aplicada al circuito y la amplitud de corriente se debe elevar al cuadrado dichas ecuaciones y sumarlas, quedando:

$$\left(\frac{V_{máx}}{I_{máx}}\right)^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$ *ecs.7.28*

Se denomina impedancia del circuito serie a la oposición que el mismo ofrece a la circulación de corriente. Su magnitud está definida por ecs.7.29 mientras que la fase se obtiene a partir de ecs.7.27.

$$|Z| = \frac{V_{máx}}{I_{máx}}$$ *ecs.7.29*

Cuando se aplica una tensión sinusoidal a un circuito, la magnitud y diferencia de fase con la corriente dependerán de los componentes del mismo. Esta dependencia es tenida en cuenta por la impedancia del circuito, cuya magnitud y fase en un circuito serie están expresadas de la siguiente manera:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \text{ecs.7.30}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right) \qquad \text{ecs.7.31}$$

Ejercicio 7.1

Para el circuito de fig.7.8 considere una frecuencia de 1KHz, amplitud de tensión de 5V, resistencia de 12 Ω, inductancia de 2mHy y capacidad de 4,7 μF.

Calcule la impedancia del circuito y utilícela para encontrar la expresión en función del tiempo de la corriente y tensión en cada componente.

Solución:

Se comienza calculando la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 6283 \quad r/s$$

Con ella se determinan las reactancias:

$$X_L = \omega L = 12{,}56 \quad (\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 33{,}86 \quad (\Omega)$$

Con ellas, la impedancia y diferencia de fase:

$$|Z| = 24{,}44\ \Omega$$

$$\varphi = -60{,}6^{\circ} = -1{,}057 rad$$

$$i(t) = 0{,}2 sen(6283t)$$

$$v(t) = 5 sen(6283t - 1{,}057)$$

$$v_R(t) = 2{,}45 sen(6283t)$$

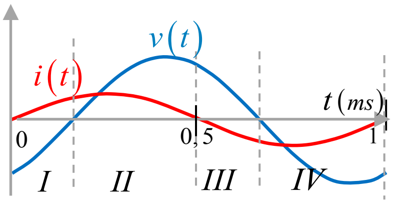
$$v_L(t) = 2{,}57\cos(6283t)$$

$$v_C(t) = -6{,}93\cos(6283t)$$

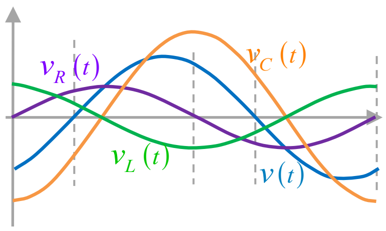
Estando la corriente expresada en amperes y las tensiones en voltios.

Se puede observar que en el capacitor hay intervalos de tiempo en que la tensión supera a la de la fuente. Dependiendo de la frecuencia, estas sobretensiones también ocurren en las inductancias.

En fig.7.9a se grafica un ciclo completo de la tensión aplicada y corriente en función del tiempo. En la misma se comprueba que la corriente inicia antes que la tensión.



(a)



(b)

Fig.7.9

Aunque la representación compleja, aplicada a la resolución de circuitos de corriente alterna, permite resolver de manera simple complicados circuitos, en este libro para la resolución de circuitos excitados con funciones sinusoidales se utiliza la representación fasorial, priorizando el tratamiento conceptual sobre la aplicación automática de reglas de resolución.

El adelanto de fase de la corriente respecto a la tensión se debe a que para esta frecuencia la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva.

Debido a que en el tiempo de un periodo, en este caso 1 ms, la fase se incrementa en 2π, la diferencia de fase equivale a un retardo en el tiempo que puede calcularse fácilmente.

En este caso,

$$\Delta t = \varphi_{(rad)} \frac{T}{2\pi} = 0{,}168 \quad (ms)$$

En fig.7.9b se puede comprobar que en cada instante, se verifica la ecs.7.23.

Circuito RLC paralelo

En este caso, como la diferencia de potencial aplicada a cada componente es la misma, se simplifica el tratamiento matemático adoptando:

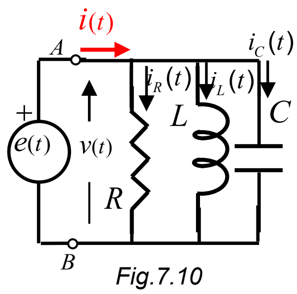


Fig.7.10

$$v(t) = V_{máx} sen(\omega t) \qquad \textit{ecs.7.32}$$

$$i(t) = I_{máx} sen(\omega t + \varphi) \qquad \textit{ecs.7.33}$$

Se comienza por la ecuación de nodo:

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) \qquad \textit{ecs.7.34}$$

Que se relacionan con la diferencia de potencial de la siguiente manera:

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R}$$

$$i_C(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$i_L(t) = L\int v(t)dt \qquad \textit{ecs.7.35}$$

Procediendo de manera similar a la del circuito serie, se llega a:

$$I_{máx} sen(\varphi) = V_{máx}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad \textit{ecs.7.36}$$

Resultando:

$$|Y| = \left|\frac{1}{Z}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \qquad \textit{ecs.7.37}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}}\right) \qquad \textit{ecs.7.38}$$

Se denomina admitancia a la inversa de la impedancia y su unidad, Ω^{-1}, se conoce con el nombre de Siemens.

Ejercicio 7.2

Repita el ejercicio anterior considerando que los componentes se conectan en paralelo con la fuente de tensión.

Solución:

El valor de la frecuencia angular y reactancias son los obtenidos anteriormente.

$$|Z| = 10,28\ \Omega$$

$$\varphi = -31^{\circ} = -0,541 rad$$

$$v(t) = 5 sen(6283t)$$

$$i(t) = 0,49 sen(6283t - 0,541)$$

$$i_R(t) = 0,41 sen(6283t)$$

$$i_L(t) = -0,39\cos(6283t)$$

$$i_C(t) = 0,15\cos(6283t)$$

Como en el caso anterior, la corriente está en amperes y las tensiones en voltios.

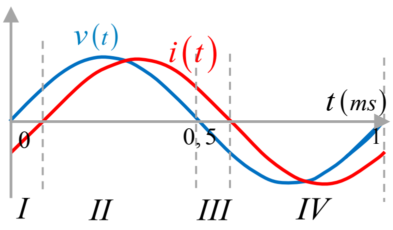
En este caso la corriente está atrasada con respecto a la tensión aplicada debido al menor valor de la reactancia inductiva con respecto a la capacitiva.

En fig.7.11b se puede comprobar que en cada instante, se verifica la ecs.7.34.

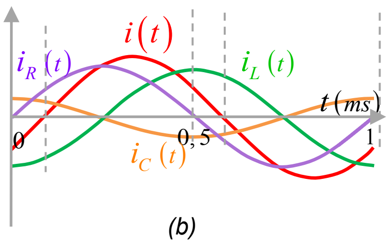
Como en los circuitos de corriente continua, muchas veces los circuitos en alterna no tienen todos sus componentes en serie o en paralelo. Los casos más simples corresponden a asociaciones serie y paralelo similares a los circuitos puramente capacitivos o puramente resistivos tratados en los capítulos 2 y 3.

En alterna, la resolución de estas asociaciones se complica debido a que las corrientes y tensiones, variando sinusoidalmente con la misma frecuencia, están desplazadas en el tiempo.

Esto lleva a que además de la magnitud se deba considerar la fase de dichas impedancias.



(a)



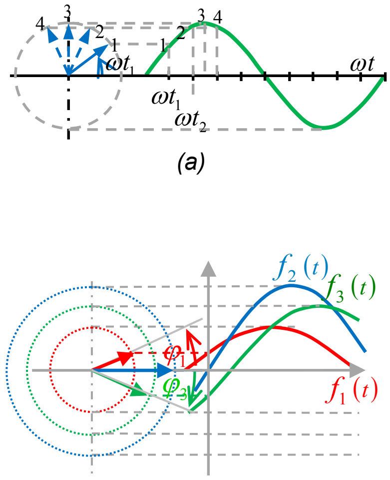
(b)

Fig.7.11

No obstante la existencia de potentes programas informáticos para simulación de circuitos y cálculo, para aprovechar su potencialidad es conveniente prescindir de los mismos, al menos en las etapas iniciales del aprendizaje. Por este motivo, en las siguientes secciones se muestran algunos métodos de resolución de circuitos como paso previo al uso de las mencionadas herramientas de cálculo.

Fasores

Cuando se trabaja con funciones armónicas de igual frecuencia pero con fase diferente, existe un desplazamiento en el tiempo entre las mismas. Teniendo en cuenta que la única diferencia entre las funciones de fig.7.9 o fig.7.11 es su amplitud y la diferencia de fase, la representación fasorial se basa en la utilización de estas dos magnitudes.



(a)

(b)

Fig.7.12

Un fasor consiste en una flecha de magnitud proporcional a la amplitud de la función armónica que representa, girando alrededor de un punto con velocidad angular igual a la frecuencia angular de la función. En la Fig.7.12a se comprueba gráficamente la correspondencia entre las representaciones fasorial y temporal.

Considerando la porción creciente de cada función, en fig.7.12b se puede comprobar que la curva indicada con 1 es la que cruza el eje horizontal en primer lugar, a continuación la marcada con 2 y posteriormente 3 alcanza el valor cero, pudiéndose afirmar que $f_1(t)$ antecede a $f_2(t)$ y esta a $f_3(t)$. Se puede llegar al mismo resultado considerando el ángulo entre los fasores dibujados a la izquierda, ubicados de modo que la proyección sobre el eje vertical coincide con el inicio de cada curva, resultando $\varphi_1 > 0$ y $\varphi_3 < 0$

En fig.7.13 se muestra el diagrama fasorial correspondiente al circuito de fig.7.8. Para su realización, además de la relación tensión / corriente en cada uno de los componentes del circuito. se debe tener en cuenta que en una resistencia la caída de potencial y corriente en todo momento están en fase mientras que en la inductancia la corriente está atrasada 90° con respecto a la tensión entre sus extremos y en la capacidad la corriente adelanta 90°con relación a la tensión entre placas.

Como se pudo comprobar en el capítulo anterior, las funciones que expresan la relación entre cargas y corrientes o entre éstas y las f.e.ms en circuitos RLC, son integrales o derivadas de funciones armónicas cuyo resultado es otra función armónica con amplitud y fase definidas por los parámetros del circuito en cuestión. Por este motivo, la representación fasorial permite simplificar notablemente la resolución de estos circuitos.

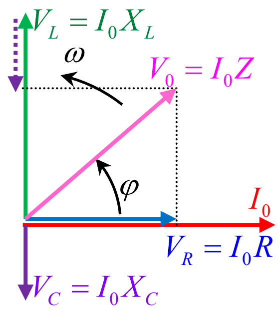
Diagrama fasorial del circuito serie

Para el caso en que todos los componentes están conectados en serie la representación comienza dibujando una flecha correspondiente a la amplitud de corriente, que es la misma para todos los componentes.

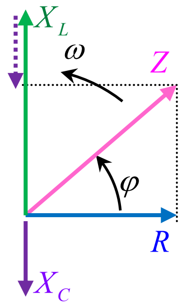
La amplitud de tensión en la resistencia, en fase con la corriente, es proporcional a la resistencia de modo que se traza el fasor V_R con longitud proporcional a la resistencia (fig.7.13a).

A continuación se calculan las reactancias inductiva y capacitiva correspondientes.

Como la corriente es la misma en todo el circuito, la amplitud de tensión en cada uno de los componentes reactivos resulta proporcional a sus respectivas reactancias. Así, para la tensión en la inductancia se dibuja el fasor V_L adelantado 90° respecto de I_0. Su longitud está determinada por la magnitud de X_L en la escala utilizada para representar V_R. De igual forma se dibuja V_C aunque atrasado el mismo ángulo respecto de I_0.



(a)



(b)

Fig.7.13

En fig.7.13 se puede comprobar la tensión en la inductancia adelanta 90º respecto de la corriente mientras que en la capacidad el ángulo es igual pero en atraso.

Que ambos fasores se encuentren alineados y dirigidos en sentido contrario significa que cuando la tensión en la inductancia alcanza su máximo valor positivo, en la capacidad tendrá la mayor excursión en sentido negativo. La tensión resultante en ambos componentes será la diferencia entre los fasores y estará a 90° del fasor representativo de la corriente, adelantado si $V_L > V_C$ o atrasado en caso contrario.

De acuerdo a ecs.7.28, el fasor representativo de la tensión aplicada V_0 se relaciona con la amplitud de tensión en la resistencia y la amplitud resultante entre la inductancia y capacidad de manera similar a un vector con sus componentes.

Considerando que el ángulo formado por la tensión aplicada y la corriente es la diferencia de fase φ, se comprueba que la representación fasorial realizada corresponde a las ecs.7.25 y 7.26.

Dividiendo cada uno de los fasores representativos de las amplitudes de tensión por la amplitud de corriente se obtiene el diagrama de impedancias del circuito (fig.7.13b).

Cuando todos los componentes están conectados en serie la representación comienza dibujando una flecha representativa de la amplitud de corriente, que es la misma para todos los componentes.

Para el caso en que todos los componentes están en paralelo la representación comienza dibujando el fasor representativo de la tensión, que es la misma para todos ellos.

Diagrama fasorial del circuito paralelo

En este caso la tensión en los componentes es la misma. Por este motivo la representación comienza dibujando el fasor representativo de la amplitud de tensión.

La amplitud de corriente I_R en la resistencia está en fase con la corriente y es inversamente proporcional al valor de la resistencia (fig.7.14a). De manera similar, la amplitud de corriente en cada uno de los componentes reactivos resulta inversamente proporcional a sus respectivas reactancias, estando el fasor I_L, representativo de la amplitud

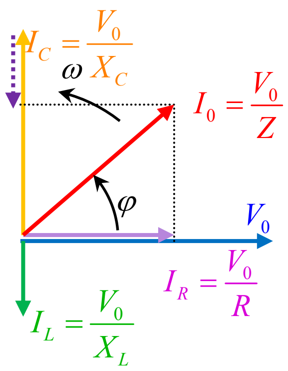
de la corriente en la inductancia, atrasado 90° respecto de la amplitud de tensión. De igual forma se dibuja I_C aunque adelantado el mismo ángulo respecto de V_0.

La amplitud de la corriente entregada por la fuente de tensión, indicada con I_0 se obtiene de manera similar a la empleada para calcular la amplitud de tensión entregada al circuito serie, siendo el ángulo de fase el comprendido entre el fasor de la corriente resultante y la tensión de la fuente.

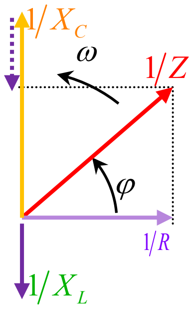
De acuerdo a la elección realizada (ecs.7.32 y 7.33), cuando $\varphi > 0$ significa que la corriente adelanta a la tensión de la fuente, comportamiento correspondiente a $I_C > I_L$ que se obtiene cuando $X_C < X_L$.

De manera similar al caso anterior, dividiendo cada fasor de fig.7.14a por la amplitud de tensión se obtiene la representación de la inversa de la impedancia en función de las inversas de la resistencia y reactancias. El diagrama de fig.7.14b se conoce con el nombre de diagrama de admitancia.

Los diagramas fasoriales permiten resolver algunas situaciones sencillas en que las que conviven componentes en serie y en paralelo.



(a)



(b)

Fig.7.14

Ejercicio 7.3

a) Calcule la amplitud de tensión en terminales del capacitor de fig.7.15 y diferencia de fase respecto de la tensión aplicada cuando la tensión entregada por la fuente al circuito tiene 5V de amplitud y 400 Hz de frecuencia. $C = 4,7\mu F,\ R_1 = 12\Omega,\ R_2 = 120\Omega$

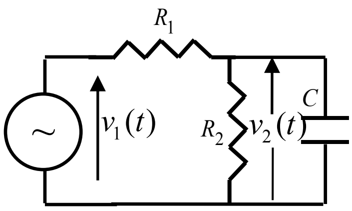


Fig.7.15

Solución:

Se dibuja el diagrama fasorial comenzando por la tensión de salida V_2, (fig.7.16).

A continuación se traza el fasor representativo de la corriente por R_2 indicado con I_2, en fase con V_2. La corriente por el capacitor, I_C, está 90° adelantada respecto a la tensión de salida. Junto con I_2 constituyen la corriente a través de R_1, indicada con I_1. La amplitud de tensión sobre la resistencia, V_{R1}, está en fase con I_1. Finalmente, como resultado de la suma de los fasores V_{R1} y V_2 se obtiene la tensión V_1 en terminales de la fuente.

Como podrá comprenderse, no es necesario dibujar estos fasores a escala. Simplemente sirven como orientación para resolver el circuito. En la figura se indica con α la diferencia de fase entre los fasores de tensión de entrada y salida y con φ al desfasaje introducido por el circuito paralelo.

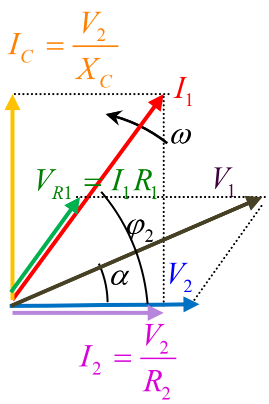


Fig.7.16

Se calcula la reactancia que ofrece C_2 y el ángulo φ, obteniéndose:

$X_{C2} = 84,65\ \Omega$, $\varphi = 54,8°$

Del diagrama,

$$V_1 \cos(\alpha) = V_2 + V_{R1}\cos(\varphi)$$
$$V_1 sen(\alpha) = V_{R1} sen(\varphi)$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$V_1^2 = V_2^2 + 2V_2V_{R1}\cos(\varphi) + V_{R1}^2$$

Donde:

$$V_{R1} = I_1R_1$$

Con

$$I_1^2 = \left(\frac{V_2}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{V_2}{X_C}\right)^2$$

Operando se obtiene:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{R_1}{X_C}\right)^2 + 2\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{R_1}{X_C}\right)^2}\cos(\varphi)\right)}}$$

$$sen(\alpha) = \frac{V_2R_1}{V_1}\sqrt{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2\left(\frac{1}{X_C}\right)^2}\ sen(\varphi)$$

Resulta $V_2 = 4,48\ V$ $I_1 = 64,77 mA.$ y $\alpha = 7,3°$.

Resolución gráfica de diagramas fasoriales

En fig.7.17 se ejemplifica el método de resolución gráfica aplicado al ejercicio anterior, que comienza asignando el valor de 1V al fasor V_2.

Para minimizar errores durante la realización del gráfico, la figura mostrada se redujo al 30% del tamaño utilizado. Originalmente el fasor tenía una longitud de 15 cm.

A continuación se calcula la corriente por R_2 y X_C para $V_2 = 1\ V$, obteniéndose $I_2 = 8,33\ mA$, $I_C = 11,81\ mA$. Se dibujaron estos fasores con una escala de 1mA/cm.

Resolviendo el triángulo formado por los fasores de corriente, se calcula la corriente que entrega la fuente, obteniéndose $I_1 = 11,45 mA$.

Como comprobación, la resultante obtenida al sumar gráficamente estos fasores deberá tener 11,45cm de longitud.

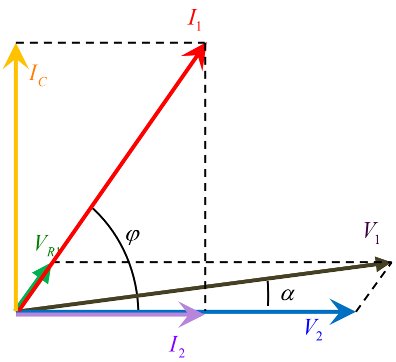


Fig.7.17

A continuación se calcula la caída de potencial en R_1 para este valor de la corriente, resultando igual a 0,1374V, siendo 2,06cm la longitud del fasor correspondiente.

Se ubica V_{R1} en fase con la corriente correspondiente y gráficamente se realiza la suma entre éste y V_2 obteniéndose V_1. Las dimensiones del mismo resultan 16,58cm en el eje horizontal y 2,17cm en el vertical, correspondiendo a estos valores una longitud de 16,72cm.

Hasta acá se trabajó con la suposición de que la tensión de salida es 1V asignándose a los fasores representativos de las tensiones 1cm por cada voltio. El único valor realmente conocido del problema es la amplitud de la tensión de entrada, 5V, debiéndose modificar las escalas de tensiones de manera que 16,72cm correspondan a 5V.

Como el fasor utilizado para la tensión de salida tiene 15cm de longitud, la magnitud real de la misma se obtiene utilizando la nueva escala:

$$V_2 = \frac{5V}{16,72cm} x15cm = 4,48V$$

Resultando el desfasaje entre la tensión de entrada y la de salida:

$$tg(\alpha) = \frac{2,17cm}{16,58cm} = 0,13 \rightarrow \quad \alpha = 7,4^{o}$$

Para un error de representación de $\pm 5\%$ el resultando será un valor dentro del rango $7^{o} < \alpha < 7,8^{o}$.

El error cometido depende del tamaño utilizado para la representación. A modo de ejemplo, suponiendo una indeterminación de $\pm 0,5mm$ en la longitud de los fasores, el error con que se determina la tangente del el ángulo calculado al final es:

$$f(\alpha) = \frac{y}{x} \rightarrow$$

$$\ln(f(\alpha)) = \ln(y) - \ln(x)$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x}$$

$$\frac{\Delta f}{f}\% = \left(\frac{\pm 0,5}{21,7} + \frac{\pm 0,5}{16,58}\right) x100\%$$

$$\frac{\Delta f}{f}\% = \pm 5\%$$

$$tg(\alpha) = 0,13(1 \pm 0,05)$$

Transformaciones serie-paralelo

Los circuitos serie y paralelo de la sección anterior, presentan a la fuente a la que se conectan una impedancia cuya magnitud y fase está determinada por los componentes y frecuencia de utilización, relacionados mediante los diagramas fasoriales correspondientes. Una de las maneras de resolver circuitos en los que algunos componentes forman una serie con otros en paralelo es transformar la parte serie a paralelo o el paralelo a una serie. La impedancia resultante debe ser la misma en módulo y fase, independientemente del equivalente que se vaya a utilizar.

El punto de partida para el equivalente serie, ecs.7.21 y 7.22 considera que la fase es positiva cuando la tensión adelanta a la corriente mientras que para el paralelo, ecs.7.32 y 7.33 se supuso que es la corriente la que lleva la delantera. Como resultado, las expresiones de las reactancias serie y paralelo son:

En los capítulos 3 y 4 se resolvieron circuitos en los que se podían identificar asociaciones serie y paralelo. De igual forma, en alterna, mediante estas transformaciones los circuitos formados por componentes en serie y en paralelo pueden transformarse en una impedancia equivalente serie o paralelo.

$$X_s = \omega L_S - \frac{1}{\omega C_S}$$ *ecs.7.39*

$$\frac{1}{X_P} = \omega C_P - \frac{1}{\omega L_P}$$ *ecs.7.40*

Si por ejemplo se trata de una reactancia inductiva en serie, X_S toma un valor positivo indicando que la corriente va detrás de la tensión. Cuando la misma se transforme al equivalente paralelo, tendrá que seguir indicando esta situación, para la que corresponde un valor negativo de X_P.

De igual forma, si se parte de una reactancia capacitiva en un equivalente, la correspondiente en el otro equivalente deberá tener signo opuesto. Este inconveniente los vamos a solucionar anteponiendo el signo menos a una de las reactancias. Para ello elegimos X_P.

De fig.7.13b, la relación entre los componentes conectados en serie, a los que se agrega el subíndice s, con la impedancia es:

$$R_s = Z\cos(\varphi)$$ *ecs.7.41*

$$X_s = Zsen(\varphi)$$ *ecs.7.42*

Los componentes en paralelo, indicados con subíndice P, se relacionan con la impedancia a través del diagrama de fig.7.14b:

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{Z}\cos(\varphi)$$ *ecs.7.43*

$$\frac{1}{X_P} = \frac{-1}{Z}sen(\varphi)$$ *ecs.7.44*

Relacionando ecs.7.42 con ecs.7.41 y ecs.7.44 con ecs.7.43 y teniendo en cuenta que la impedancia que representa cada equivalente es la misma:

$$\frac{X_S}{R_S} = \frac{-R_P}{X_P}$$ *ecs.7.45*

Partiendo de ecs.7.45 se obtienen las ecuaciones de transformación de un circuito serie a uno en paralelo:

$$X_P = -X_s\left(1 + \frac{R_s^2}{X_s^2}\right)$$ *ecs.7.48*

$$R_P = R_s\left(1 + \frac{X_s^2}{R_s^2}\right)$$ *ecs.7.49*

Para transformar un circuito paralelo a uno en serie:

La impedancia es la misma para ambos casos:

$$Z = \frac{R_S}{\cos(\varphi)} = R_P\cos(\varphi) \rightarrow$$

$$\frac{R_S}{R_P} = \cos^2(\varphi)$$ ecs.7.46.

$$Z = \frac{X_S}{sen(\varphi)} = -X_P sen(\varphi) \rightarrow$$

$$\frac{X_S}{X_P} = -sen^2(\varphi)$$ ecs.7.47

Restando las ecs.7.47 y 7.46:

$$\frac{R_S}{R_P} - \frac{X_S}{X_P} = 1$$

Despejando Rp en ecs.7.45 y reemplazando en esta última:

$$X_P = -X_S\left(1 + \frac{R_s^2}{X_s^2}\right)$$

Reemplazando este resultado en ecs.7.45:

$$R_P = R_S\left(1 + \frac{X_s^2}{R_s^2}\right)$$

De manera similar se obtienen las ecs.7.50 y 7.51

$$R_S = \frac{R_P}{\left(1+\frac{R_P^2}{X_P^2}\right)}$$ ecs.7.50

$$X_S = \frac{-X_P}{\left(1+\frac{X_P^2}{R_P^2}\right)}$$ ecs.7.51

Una manera de comprobar este método es comparándolo con valores obtenidos aplicando otros métodos, por ejemplo resolviendo nuevamente el ejercicio 7.3.

Convertimos el paralelo RC en una impedancia en serie con la resistencia:

$X_P = 84,65\Omega$, $R_P = 120\Omega$

Mediante las ecs.7.50 y 7.51 se obtiene:

$R_S = 39,87\Omega$, $X_S = -56,52\Omega$

Para calcular la corriente entregada por la fuente de 5V, se determina la impedancia serie total:

$$Z_S = \sqrt{(39,87+12)^2+(56,52)^2} = 76,72\Omega$$ ecs.7.52

$$I = \frac{5}{76,72} = 65,17mA$$

Siendo aceptable la diferencia de 0,6% respecto al valor calculado anteriormente, debido a la cantidad de decimales utilizada.

Para determinar V_2 se calcula la impedancia serie equivalente del RC paralelo:

$$Z_S^{'} = \sqrt{(39,87)^2+(56,52)^2} = 69,17\Omega$$ ecs.7.53

Resultando

$V_2 = I_1 Z_S^{'} = 4,49V$

Para calcular la diferencia de fase tenemos que considerar que el ángulo calculado anteriormente es el que existe entre los fasores V_1 y V_2.

Del diagrama de fig.7.18,

$$\alpha = \beta - \varphi$$ ecs.7.54

Siendo $\varphi = arctg\frac{X_S}{R_S} = -54,8°$, $\beta = arctg\frac{X_S}{R_S+R_1} = -47,45°$,

$\alpha = 7,4°$

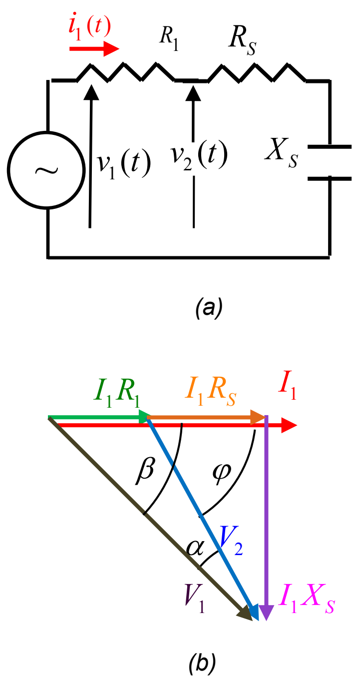


Fig.7.18

Respuesta en frecuencia

Circuito serie

Las representaciones fasoriales son útiles para comprobar el comportamiento del circuito para diferentes valores de la frecuencia de la fuente de tensión.

Para bajas frecuencias, $X_C >> X_L$ resultando $\varphi < 0$. El límite de frecuencias bajas se tiene cuando se utiliza una fuente de corriente continua. En estas condiciones la reactancia capacitiva es infinitamente grande impidiendo la circulación de corriente por el circuito.

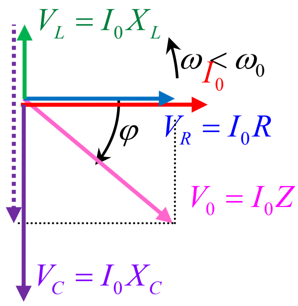
Así, cuando $f \to 0$ la impedancia es capacitiva $\left(\varphi = -90°\right)$ y su valor infinitamente grande.

En el otro extremo, cuando $f \to \infty$ las variaciones ocurren en un intervalo de tiempo tendiendo a cero, de la misma manera que los cambios considerados al estudiar el transitorio en corriente continua. En este caso es la reactancia inductiva la que toma un valor infinitamente grande induciendo una f.e.m. que impide la circulación de corriente. Igual que en la situación considerada anteriormente, la impedancia toma un valor muy grande aunque, por su característica inductiva la diferencia de fase es +90°.

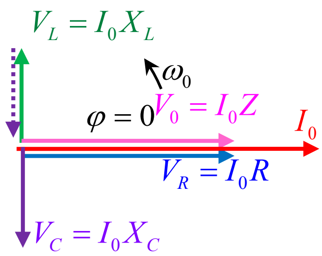
Entre estos valores extremos, al aumentar la frecuencia desde cero la impedancia comienza a disminuir lo mismo que la magnitud de la diferencia de fase negativa, hasta llegar a un valor de frecuencia en que las reactancias capacitiva e inductiva se igualan y la impedancia es igual a la resistencia del circuito. La frecuencia a la que ocurre esta situación es la misma a la que el circuito responde libremente tratada en el capítulo anterior, o frecuencia de resonancia.

En resonancia la impedancia del circuito serie toma su menor valor. Por este motivo la corriente es máxima en resonancia serie. Por encima de esta frecuencia, la reactancia inductiva predomina sobre la capacitiva, la magnitud de la impedancia comienza a aumentar y el ángulo de fase es positivo, aumentando desde 0 hasta 90° a medida que aumenta la frecuencia.

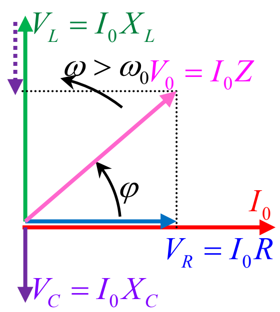
Para graficar el módulo y fase de la impedancia en función de la frecuencia, las ecs7.30y 7.31 pueden reescribirse de la siguiente manera:



(a)



(b)



(c)

Fig.7.19

$$\left|Z\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)^2}$$

$$\varphi = arctg\left(\left(\frac{\omega L}{R}\right)\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right) = arctg\left(\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)\right)$$

ecs.7.55

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ecs.7.56

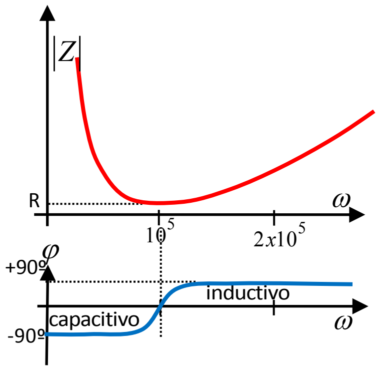


Fig.7.20

El circuito serie es capacitivo por debajo de la resonancia. (en continua la capacidad interrumpe la circulación de corriente) mientras que es inductivo por encima de la misma, como puede comprobarse de ecs.7.55. En fig.7.20 se grafican estas expresiones en función de la frecuencia para el caso en que $R = 10\,\Omega,\ L = 0{,}1\,mH_y,\ C = 1\mu F.$.

Circuito paralelo

En el caso de un circuito paralelo, como la reactancia inductiva es muy pequeña a muy bajas frecuencias, su valor es el que predomina frente a los demás, estando la corriente atrasada respecto del la tensión. Como el ángulo de fase positivo corresponde a un comportamiento capacitivo, en este caso para frecuencias muy bajas también el ángulo es negativo.

$$\left|\frac{1}{Z}\right| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2\left(\left(1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)\right)}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{R}{\omega L}\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)\right) = arctg\left(\omega CR\left(1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)\right)$$

ecs.7.57

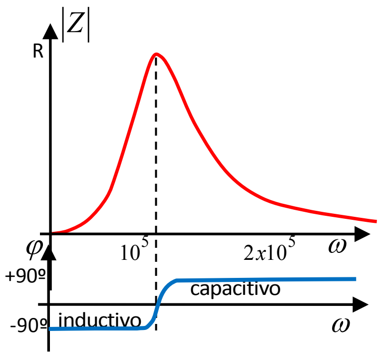


Fig.7.21

En fig.7.21 se muestra la respuesta en frecuencia de este circuito pudiéndose comprobar que, diferenciándose del circuito serie, en resonancia la impedancia toma el mayor valor.

Potencia en circuitos de corriente alterna

Al considerar una resistencia conectada a un generador de corriente alterna, nos referimos a la potencia disipada utilizando el valor eficaz de la misma. Esta es una magnitud equivalente a una corriente continua que entregaría a la resistencia la misma cantidad de energía en igual intervalo de tiempo.

De ecs.7.8 se puede obtener la energía disipada en el tiempo de un periodo en la resistencia de fig.7.2, que se puede expresar en función de la amplitud de corriente, relacionada con la tensión por la ecs.7.6

$$u(t) = I_{máx}^2 R \int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{1}{2} I_{máx}^2 RT \qquad \textit{ecs.7.58}$$

La potencia media es la cantidad de energía disipada en un ciclo por unidad de tiempo:

$$P_{media} = \frac{U_{ciclo}}{T} = \frac{1}{2} I_{máx}^2 R \qquad \textit{ecs.7.59}$$

Cuando se utiliza excitación sinusoidal, la relación entre la amplitud y el valor eficaz es la correspondiente a ecs.7.11, resultando:

$$P_{media} = I_{eficaz}^2 R$$

Sin recurrir al reemplazo mencionado con ecs.7.6, se obtiene la potencia media en función de la tensión aplicada:

$$P_{media} = \frac{V_{eficaz}^2}{R} \qquad \textit{ecs.7.60}$$

Estos resultados corresponden al circuito en el que solamente existe una resistencia aunque generalmente los circuitos utilizados en corriente alterna se debe tener en cuenta al menos uno de los componentes reactivos.

De la misma manera a la obtenida para los circuitos RLC serie y paralelo, cualquier circuito formado por diferentes agrupaciones de estos componentes podrá ser reemplazado por una impedancia equivalente con magnitud y fase determinadas por el valor de los componentes y de la frecuencia a la que se va a utilizar.

Para evaluar la disipación de energía en una impedancia con magnitud Z y fase φ, cualquiera de las dos formas de excitación utilizadas, expresadas por los pares de ecs.7.21 y 7.22 o por ecs.7.32 y 7.33, lleva al mismo resultado.

$$u(t) = \int_0^T p(t)dt == \int_0^T i(t)v(t)dt$$

$$u(t) = \int_0^T p(t)dt = V_{máx} I_{máx} \int_0^T sen(\omega t) sen(\omega t + \varphi) dt \qquad \textit{ecs.7.61}$$

Desarrollando el seno de la suma de dos ángulos, se obtienen dos términos integrales, resultando:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \qquad \textit{ecs.7.62}$$

$$u_1(t) = V_{máx} I_{máx} \int_0^T sen^2(\omega t) cos(\varphi) dt \qquad \textit{ecs.7.63}$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} V_{máx} I_{máx} \int_0^T sen(2\omega t) sen(\varphi) dt \qquad \textit{ecs.7.64}$$

Evaluando dichas integrales en el intervalo de tiempo especificado, se tiene

$$u_1(t) = \frac{T}{2} V_{máx} I_{máx} \cos(\varphi) \qquad \textit{ecs.7.65}$$

$$u_2(t) = 0 \qquad \textit{ecs.7.66}$$

Estas expresiones corresponden a la energía entregada por la fuente en un ciclo. Según ecs.7.59, la potencia media se obtiene dividiendo por el periodo T.

$$P_{media} = \frac{1}{2} V_{máx} I_{máx} \cos(\varphi) \qquad \textit{ecs.7.67}$$

Generalmente la potencia se expresa en función de los valores eficaces:

$$P_{media} = V_{eficaz} I_{eficaz} \cos(\varphi) \qquad \textit{ecs.7.68}$$

Si el circuito considerado es una serie RLC, la impedancia responde al diagrama de fig.7.13, del que se puede comprobar:

$$V_{máx} I_{máx} \cos(\varphi) = I^2_{máx} R \qquad \textit{ecs.7.69}$$

Que reemplazado en ecs.7.67 conduce a la expresión de ecs.7.60.

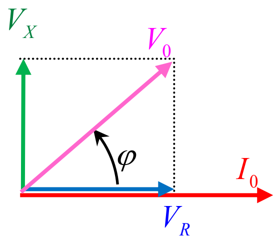
En el caso en que los componentes se encuentren conectados en paralelo, el primer término de la potencia relacionado con $u_1(t)$ lleva a la ecs.7.60.

En ambos casos y en general para cualquier otra configuración la energía disipada en la resistencia se denomina energía activa y la potencia correspondiente, potencia activa.

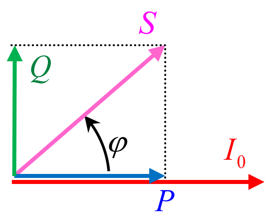
La energía $u_2(t)$, intercambiada entre la fuente y los campos, se denomina energía reactiva.

En fig.7.22a se repite el diagrama de fig.7.13 para el circuito serie. Multiplicando los fasores representativos de las tensiones por $I_0/2$, la proyección horizontal indicada con P en fig.7.21b corresponde a la potencia activa, ecs.7.65.

La proyección vertical, indicada con Q, tiene en cuenta la energía reactiva por unidad de tiempo y por este motivo se la denomina potencia reactiva.



(a)



(b)

Fig.7.22

Estando los componentes en serie, debido al intercambio de energía reactiva con la fuente, la tensión entregada al circuito es mayor que la necesaria sobre la resistencia. Por este motivo, en cada instante

$$i(t)v(t) > i(t)v_R(t) \qquad \textit{ecs.7.70}$$

La potencia entregada por la fuente, denominada potencia aparente y representada mediante el fasor S, además de la potencia disipada en la resistencia, tiene en cuenta la rapidez con que se realiza el intercambio de energía entre la impedancia y la fuente.

Se llega a la misma conclusión utilizando el equivalente paralelo de la impedancia, siendo en este caso la corriente entregada por la fuente la que se incrementa debido al intercambio de energía.

El siguiente ejercicio permite relacionar lo diferentes tipos de energía presentes en un circuito de corriente alterna.

En este ejemplo se consideran componentes concentrados. El inductor caracterizado por su inductancia y resistencia serie y el capacitor con su capacidad y resistencia en paralelo para tener en cuenta las pérdidas en el dieléctrico fueron representados mediante el equivalente RLC utilizado.

El mismo comportamiento se tiene cuando se impulsa una corriente sinusoidal por un alambre conductor.

Ejercicio 7.4:

Considere un circuito formado por una resistencia de 1000 Ω en serie con un capacitor de 1 μF y una inductancia de 1 mH_y. La corriente por dichos componentes tiene 1mA de amplitud y frecuencia angular igual a 400 r/s.

a) Calcule la frecuencia a la que es excitado el circuito y la frecuencia de resonancia del mismo. Analice los valores obtenidos para indicar el comportamiento esperado de este circuito (capacitivo inductivo o en resonancia).

b) Calcule las reactancias intervinientes y la impedancia del circuito.

c) Exprese en función del tiempo la tensión y corriente entregada por la fuente al circuito.

d) Encuentre la expresión en función del tiempo de la potencia entregada por la fuente al circuito.

e) Exprese en función del tiempo la potencia instantánea en cada componente.

f) Analice los resultados obtenidos anotando las conclusiones.

a) $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 63,66 \quad H_z$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 31622 \quad r/s \rightarrow \qquad f_0 = 5032,9\ Hz,$$

$$\omega << \omega_0 \rightarrow \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{1}{\omega C}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right) \approx -\frac{1}{\omega C}$$

El comportamiento es capacitivo, funcionamiento por debajo de la frecuencia de resonancia.

b) X_C=2500 (Ω) $X_L = 0,4$ (Ω) ,

$|Z| = 2.692,6\ (\Omega)$, φ=-68º=-1,19 rad

c) $i(t) = 1sen(400t)$ (mA)

$v(t) = 2,69sen(400t - 1,19)$ (V)

d) $p(t)$=2,69sen$(400t)$sen$(400t - 1,19)$ (mW)

e) $p_R(t) = i^2(t)R = 1sen^2(400t)$ (mW)

$$p_L(t)=i(t)L\frac{di}{dt}$$

$$p_L(t)=0,2\text{sen}(800t) \quad (mW)$$

$$p_C(t)=i(t)\frac{\int i(t)dt}{C}$$

$$p_C(t)=-1,25\text{sen}(800t) \quad (mW)$$

f) En fig.7.23a se grafican la tensión y corriente suministradas por la fuente y en fig.7.23b la potencia entregada por la misma durante un ciclo.

La fig.7.23c se refiere a la rapidez con que reciben energía cada uno de los componentes pudiéndose comprobar que el total, Fig.7.23d, coincide con la rapidez con que la fuente la suministra al circuito.

En los tramos indicados con II y IV es la fuente la que entrega energía al circuito mientras que en I y III parte regresa a la misma.

Debido a la existencia de resistencia en el circuito, el promedio de energía entregada por la fuente en un ciclo (superficie bajo la curva p(t) en los tramos II y IV) es mayor que la que recibe.

La energía reactiva continúa siendo nula en el total del ciclo aunque, en cada instante es mayor la almacenada en el campo eléctrico respecto a la correspondiente al campo magnético.

Conclusiones:

Parte de la energía entregada por la fuente se disipa en la resistencia. Del remanente, una parte es devuelta a la fuente mientras que otra es intercambiada entre los campos magnético y eléctrico permaneciendo en el circuito.

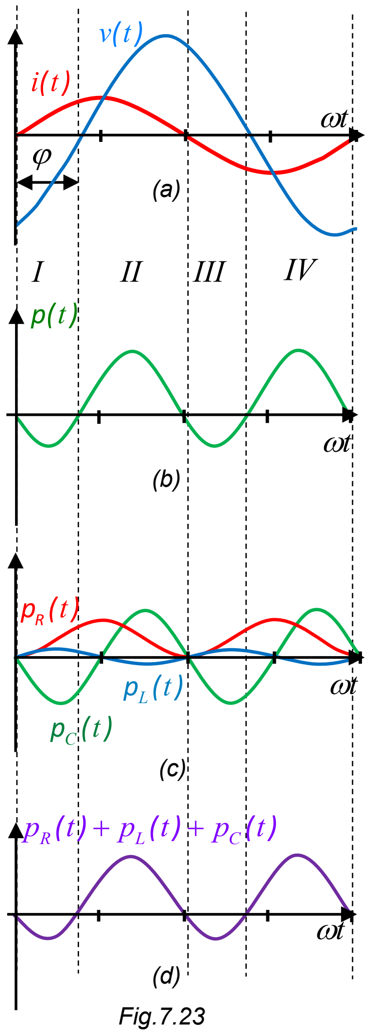


Fig.7.23

Ejercicio 7.5

Repita el ejercicio anterior considerando un circuito RLC paralelo, con $R = 2k\Omega$, $C = 33nF$ y $L = 7,67\ nH_y$ conectado a un generador de alterna con amplitud de 10 V y frecuencia de 10MHz.

a) $\omega = 2\pi f = 62{,}83x10^6 \qquad r/s$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 62{,}85x10^6 \qquad r/s$$

$\omega \simeq \omega_0$

El circuito se encuentra funcionando a la frecuencia de resonancia.

b) $X_C = X_L = 0{,}482(\Omega) \;\therefore\; |Z| = 2k\Omega \;,\; \varphi = 0^o$

c) $v(t) = 10\text{sen}(\omega_0 t) \qquad (V)$

$I(t) = 5\text{sen}(\omega_0 t) \qquad (mA)$

d) $p(t) = 50\text{sen}^2(\omega_0 t) \qquad (mW)$

e) $p_R(t) = i^2(t)R = 50\text{sen}^2(\omega_0 t) \qquad (mW)$

La corriente a través de la inductancia es:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt = \frac{-1}{\omega_0 L}\text{V}_0\cos(\omega_0 t)$$

$$i_L(t) = -20{,}7\cos(\omega_0 t) \qquad (A)$$

La energía en el campo magnético:

$$u_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t) = \frac{1}{2}L\frac{1}{\omega_0^2 L^2}\text{V}_0^2\cos^2(\omega_0 t)$$

Reemplazando ω_0

$$u_L(t) = \frac{1}{2}C\text{V}_0^2\cos^2(\omega_0 t)$$

Derivando respecto al tiempo se obtiene la potencia entregada a la inductancia:

$$p_L(t) = \frac{du_L(t)}{dt} = \frac{-1}{2}\omega_0 C\text{V}_0^2\text{sen}(2\omega_0 t)$$

El producto entre la tensión y corriente en la inductancia llevan al mismo resultado:

$$p_L(t) = \frac{\text{v}(t)}{L}\int v(t)dt$$

$$p_L(t) = \frac{-\text{V}_0^2}{\omega_0 L}\text{sen}(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$$

$$p_L(t) = -103{,}73\text{sen}(2\omega_0 t) \qquad (W)$$

Procediendo de la misma manera para el campo eléctrico:

$$u_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) = \frac{1}{2}C\text{V}_0^2\text{sen}^2(\omega_0 t)$$

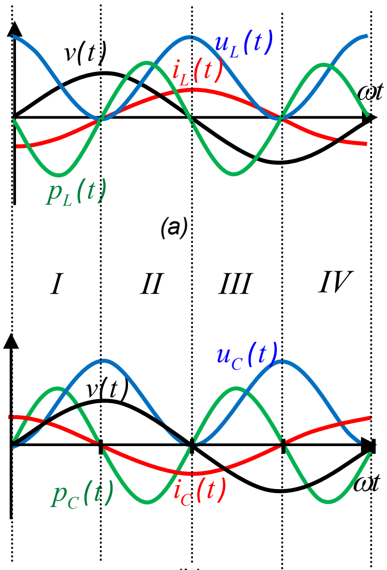


Fig.7.24

En el tramo I, fig.7.24a, la f.e.m. inducida debe realizar trabajo para impulsar la corriente por la inductancia en contra de la tensión aplicada, disminuyendo la energía en el campo magnético.

En el tramo I, fig.7.24b, la corriente por el capacitor tiene la misma polaridad que la tensión aplicada por la fuente, cargando al capacitor y por lo tanto incrementando la energía en el campo eléctrico.

$$p_C(t)=\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{1}{2}\omega_0 C\mathrm{V}_0^2\mathrm{sen}(2\omega_0 t)$$

O a través del producto

$$p_C(t)=\mathrm{v}(t)C\frac{dv}{dt}$$

Obteniéndose:

$$p_C(t)=103,73\mathrm{sen}(2\omega_0 t) \qquad (W)$$

$$i_C(t)=C\frac{dv(t)}{dt}=\omega_0 C\mathrm{V}_0\cos\,(\omega_0 t)$$

$$i_C(t)=20,7\cos\,(\omega_0 t) \qquad (A)$$

La corriente entregada por el generador es pequeña pero por la inductancia y capacidad toma un valor considerable. Lo mismo ocurre con la potencia, aunque la pequeña cantidad de energía que por unidad de tiempo entrega el generador se disipa completamente en la resistencia.

La energía reactiva, que fue entregada por la fuente en el transitorio inicial, se reparte entre los campos eléctrico y magnético oscilando en cada uno con frecuencia doble a la de la fuente. Los máximos de energía de campo eléctrico coinciden con los máximos de la tensión aplicada, anulándose en los pasajes por cero de la misma donde ocurren los máximos de energía magnética. En fig.7.24 se muestran las representaciones correspondientes, comparables a las de fig.6.13 y 6.14.

Transmisión de la energía

Una de las ventajas de la energía eléctrica es la posibilidad de poner a disposición de muchos usuarios una parte de la energía disponible en la naturaleza, como sucede con la transportada por los ríos de montaña y convertida en energía eléctrica en una central hidroeléctrica.

La transmisión de energía eléctrica alterna puede realizarse gracias a la utilización de transformadores con muy alto rendimiento.

Para de llegar a destino, la energía eléctrica deberá recorrer cientos y hasta miles de kilómetros. Debido a la resistencia de los conductores, las caídas de potencial en el trayecto pueden llegar a ser inadmisibles cuando las corrientes toman valores considerables. Dado que la potencia es proporcional a la corriente y a la tensión, se puede transmitir la misma cantidad de energía disminuyendo la corriente y elevando la tensión. De esta manera, como la potencia disipada es proporcional al cuadrado de la corriente, además de elevarse el rendimiento con que se transporta la energía se reducen considerablemente los costos de instalación debido a la reducción en la sección del cableado.

A modo de ejemplo, para disponer de 1MW de potencia con una tensión de 220V, la corriente resulta del orden de 4500A mientras que, elevando la tensión a 400 KV, la corriente es del orden de 2,5A.

Una de las principales ventajas de la corriente alterna respecto a la utilización de sistemas de corriente continua reside en la posibilidad de elevar y disminuir la tensión y corriente mediante transformadores.

En la Fig.7.25 se muestra un ejemplo suponiendo que la generación se realiza con valor eficaz de 100V que se eleva a 400KV en el primer transformador para su transmisión reduciéndose finalmente a 220V para su distribución.

La empresa distribuidora de energía eléctrica impone a los consumidores un sobreprecio a medida que disminuye el factor de potencia de su consumo. Principalmente para grandes consumos, los usuarios deben corregir este factor tratando que sea cercano a la unidad.

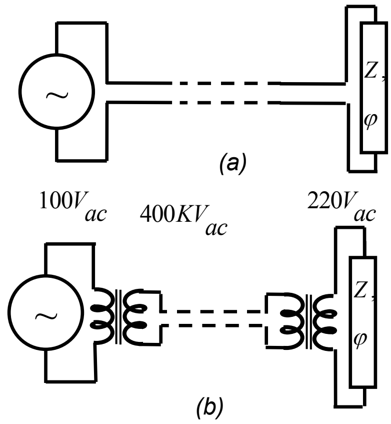


Fig.7.25

Compensación del factor de potencia

En la ecuación 7.68 se puede observar que para la misma potencia activa, a medida que el factor de potencia disminuye la corriente por las líneas de distribución se incrementan, aumentando la potencia disipada en los cables de conexionado. Para el ejemplo de fig.7.25 se supone un factor de potencia igual a la unidad. En caso de ser menor, por ejemplo 0,7 la corriente se elevaría a 3,6A duplicándose la potencia disipada en la línea. El valor de la impedancia y factor de potencia en este caso es el resultado del consumo de cada fábrica y domicilio particular alimentado por dicha red de distribución.

Considerando que los dispositivos eléctricos están diseñados para utilizarse conectados a la red eléctrica de distribución, en Argentina 220 V eficaces y 50 Hz, al conectar un dispositivo para corregir el factor de potencia se debe garantizar el mantenimiento del valor de tensión y frecuencia entregados a la carga.

Tanto para el equivalente serie como para el paralelo, factor de potencia unitario corresponde a la igualdad entre la reactancia inductiva y capacitiva. Dependiendo del tipo de consumo, el agregado de un componente reactivo permite disminuir este factor.

Generalmente los grandes consumos involucran bobinados en hornos eléctricos y motores, debiendo utilizarse capacitores para compensar la característica inductiva de la carga.

El capacitor utilizado para compensar el factor de potencia en cargas inductivas no puede conectarse en serie con la misma puesto que de ser así, la tensión de trabajo sobre la carga superaría el valor nominal de funcionamiento. El siguiente ejercicio permite comprobar que en caso de ser necesario un capacitor de compensación, debe necesariamente colocarse en paralelo con la carga.

Ejercicio 7.6: Considere un motor monofásico de corriente alterna con los siguientes valores nominales de funcionamiento:

Tensión:	220V
Frecuencia:	50Hz
Potencia:	5KW
Factor de potencia:	0,7

a) Calcule la corriente que atraviesa su bobinado, el módulo de la impedancia y el valor de la resistencia e inductancia del equivalente serie.

b) Se desea aumentar el factor de potencia agregando un capacitor al circuito. Analice las ventajas y desventajas de utilizar una conexión serie o paralelo para tal fin y determine el valor de capacidad para el caso límite de llevar el factor de potencia a la unidad.

Resolución:

Dado que los valores especificados son valores eficaces, la expresión de la potencia en función de los valores eficaces permite determinar la corriente por el motor:

$$I = \frac{P}{V_0 \cos\varphi}$$

Resultando una corriente de 32,5A

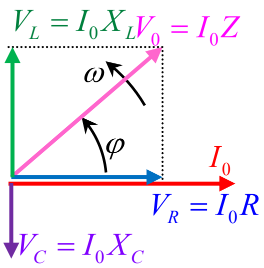
El módulo de la impedancia es la relación entre las amplitudes de la tensión y corriente por la misma obteniéndose el mismo resultado si se relacionan sus valores eficaces:

$$|Z| = \frac{V}{I}$$

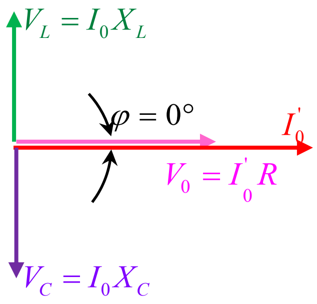
En este caso la impedancia es $6,77\Omega$.

La inductancia y resistencia del circuito serie equivalente se pueden calcular a partir del diagrama fasorial, fig.7.26a, resultando $R = 4,7\Omega$ y $L = 15,4mHy$.

Para llevar el factor de potencia a la unidad se evalúan las dos posibilidades de conexionado del capacitor.



(a)



(b)

Fig.7.26

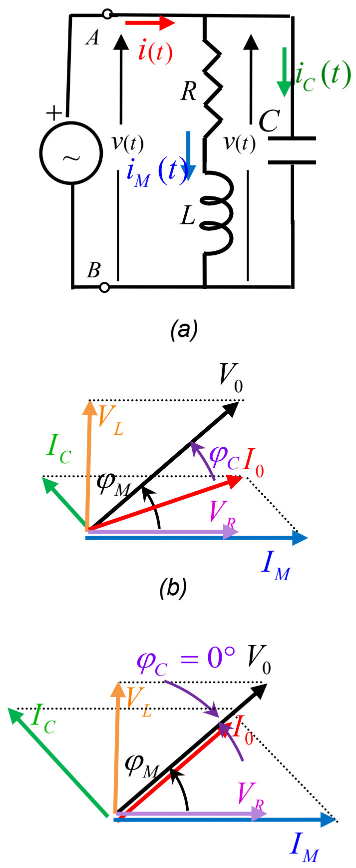
Capacitor en serie:

Al conectar en serie una capacidad, el tratamiento resultante es el ya considerado de circuito RLC serie en resonancia para el caso particular en que el factor de potencia se lleva a la unidad. En fig.7.26.a se repite el diagrama para el circuito serie y en fig.7.26.b el resultado luego de la corrección serie. En la misma se comprueba que este tipo de compensación incrementaría la corriente a través de la carga a un valor muy por encima (en este caso +44%) del especificado.

Capacitor en paralelo:

En Fig.7.27a se esquematiza este tipo de conexión. Partiendo del diagrama fasorial sin el capacitor de compensación (Fig.7.27b), se dibuja el fasor correspondiente a la corriente por el capacitor, observándose una disminución en el ángulo de fase. Aunque en Fig.7.27c se muestra el diagrama correspondiente a la compensación total, utilizado para calcular la capacidad en paralelo con la carga, un factor de 0,9 evita inestabilidades ocasionadas en resonancia.

$$I_M = \frac{P_M}{V_0 \cos\varphi}, \qquad I_C = I_M sen\varphi, \qquad C < \frac{Ptg\varphi}{2\pi f V_0^2}$$



(a)

(b)

(c)

Fig.7.27

Otra ventaja de la corriente alterna

En la fig.7.28 se muestran tres bobinas espacialmente orientadas con una diferencia de 120º por las que circulan corrientes desfasadas temporalmente en 120º. La intensidad del campo magnético en el eje de cada bobina es

$$B_1 = B_0 sen(\omega t)$$

$$B_2 = B_0 sen\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$B_3 = B_0 sen\left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) \qquad \text{ecs.7.71}$$

El campo magnético en la zona central, sombreada, resulta:

$$B_x = B_1 - \frac{B_2}{2} - \frac{B_3}{2}$$

$$B_y = B_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - B_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ecs.7.72}$$

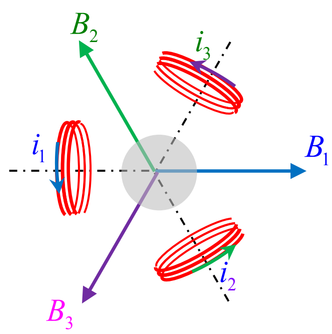


Fig.7.28

Reemplazando 7.71 en 7.72 y mediante el desarrollo del seno de la suma de ángulos, se obtiene:

$$B_x = \frac{3}{2} B_0 sen\,(\omega t)$$

$$B_y = \frac{3}{2} B_0 \cos\,(\omega t) \qquad \text{ecs.7.73}$$

La expresión 7.73 describe un campo magnético de amplitud 3/2Bo que gira con velocidad angular ω denominado campo rotante.

Colocando una pieza de hierro en la zona sombreada, esta comenzará a girar con el campo.

Contrariamente, haciendo rotar un imán entre tres bobinados dispuestos espacialmente como en la figura, las fuerzas electromotrices inducidas en los mismos estarán desplazadas entre sí 120º eléctricos (Fig.7.29a).

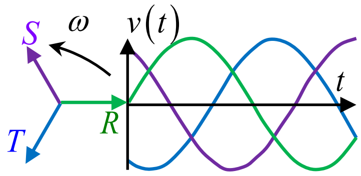
El sistema trifásico utilizado para sistemas de potencia, consiste en tres tensiones desfasadas entre sí 120º eléctricos, cuyo valor eficaz es de 380V, denominadas tensiones de línea.

En la Fig.7.29b se muestran las tres fases conectadas a impedancias del mismo valor de modo que las corrientes por cada línea son iguales, aunque desplazadas temporalmente. Un sistema de este tipo, se denomina equilibrado.

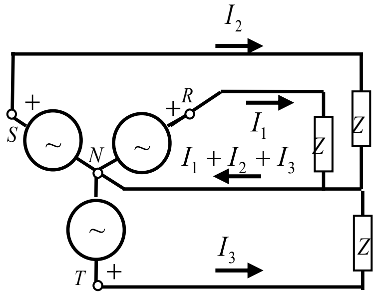
$$I_1 = I_0 sen(\omega t)$$

$$I_2 = I_0 sen\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$I_3 = I_0 sen\left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) \qquad \text{ecs.7.74}$$



(a)



(b)

Fig.7.29

Puede observarse que los tres generadores se unen por un extremo utilizándose un cuarto conductor, denominado neutro, para retorno de las corrientes. De las ecs.7.74, cuando se trata de un sistema equilibrado, la corriente por el neutro es nula.

Aunque el estudio de la respuesta de una línea utilizada para unir un generador con la carga se realiza en cursos avanzados de ingeniería utilizando representación exponencial compleja, es conveniente intentar una explicación sencilla aplicando los métodos de resolución utilizados en este capítulo. De esta manera, relacionando el conocimiento adquirido con temas más avanzados, se espera que el alumno pueda abordar el estudio de los mismos en mejores condiciones, enfrentando con mejor disposición complicadas elaboraciones matemáticas y comprendiendo la utilidad de los resultados a medida que van apareciendo.

Línea de transmisión en alterna

Utilizando parámetros distribuidos en una línea muy larga, en el capítulo anterior se pudo determinar que, introduciendo determinada cantidad de carga en un extremo, se perturba el estado de equilibrio de la misma.

Esta perturbación viaja a lo largo de la línea haciendo vibrar a su paso a las cargas de acuerdo con el patrón de excitación inicial, atenuándose a medida qua se aleja del extremo perturbado debido a las pérdidas de energía en los alambres y aislante que los soportan.

Impedancia de la línea

Consideremos un generador sinusoidal en un extremo de una larga línea en la que despreciamos las resistencias en serie con la inductancia y en paralelo con la capacidad del modelo considerado en el capítulo anterior, representativos de la atenuación producida por la resistencia del alambre y las fugas en el dieléctrico.

La línea se encuentra dispuesta horizontalmente y alejada de cualquier otro objeto. Considerando que x=0 corresponde al punto de conexión del generador, el primer paso a resolver consiste en determinar qué representa la línea para el generador.

Aplicando una tensión en el extremo comenzará a circular corriente por la línea, de modo que para el generador, la misma es una impedancia de módulo Z y fase φ.

Si utilizamos el equivalente paralelo, las expresiones para la tensión y corriente en el generador, suponiendo carga inductiva, serán:

$$v(t) = V sen\,(\omega t) \qquad \text{ecs.7.75}$$

$$i\,(t) = \frac{V}{Z} sen\,(\omega t - \varphi) \qquad \text{ecs.7.76}$$

Si en cambio se utiliza el equivalente serie para carga on la misma característica, resultarán:

$$i\,(t) = I sen\,(\omega t) \qquad \text{ecs.7.77}$$

$$v\,(t) = IZ sen\,(\omega t + \varphi) \qquad \text{ecs.7.78}$$

Los resultados obtenidos deberán verificarse para ambas representaciones obedeciendo, las corrientes y tensiones por la línea, al patrón impuesto por el generador. Si se considera que no existe atenuación, a lo largo de la línea las mismas no tendrán modificación.

En la línea para el equivalente paralelo resultará:

$$v_i\,(t) = V sen\,(\omega t - Kx) \qquad \text{ecs.7.79}$$

$$i_i\,(t) = \frac{V}{Z} sen(\,(\omega t - \varphi) - Kx) \qquad \text{ecs.7.80}$$

Donde el subíndice i se utiliza para mencionar las magnitudes correspondientes a la onda que avanza alejándose del generador u onda incidente. La constante K, permite expresar la influencia de la posición en la línea en la diferencia de fase.

Considerando que la forma se repite cada 360°,

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{ecs.7.81}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{\lambda}{T}$$

$$v = \frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{l\varsigma}} \qquad \text{ecs.7.82}$$

Siendo ℓ y ς la inductancia y capacidad por unidad de longitud de la línea.

Para representar la línea se puede utilizar el equivalente serie o paralelo.

Según se vio en el capítulo anterior, la línea tiene una frecuencia natural de oscilación determinada por su inductancia y capacidad por unidad de longitud. La frecuencia del generador puede ser cualquiera, de modo que supondremos que está por debajo de la resonancia.

Como queremos representar una impedancia por debajo de la resonancia, si elegimos el equivalente serie, será la capacidad la que mayor influencia tenga en su valor. Por este motivo, el ángulo de fase para el equivalente serie será negativo.

Si en cambio utilizamos el equivalente paralelo, es la inductancia la que mayor corriente toma en bajas frecuencias, de modo que el comportamiento será inductivo y en ángulo de fase también resultará negativo.

La impedancia que ofrece la línea al generador es la relación tensión/ corriente en un punto cualquiera de la misma. Para hallar su expresión en función de los parámetros de la línea utilizando el equivalente paralelo, se recurre a las ecs.6.48 y 6.49 correspondientes a la propagación de una onda en la línea. De 6.48:

$$-l\frac{V}{Z}\omega\cos(\,(\omega t-\varphi)-Kx)=-KV\cos\,(\omega t-Kx) \qquad \textit{ecs.7.83}$$

Como estas ecuaciones son válidas para cualquier valor de x y de t, se deben cumplir en el extremo unido al generador en el instante t=0.

$$\frac{\cos(-\varphi)}{Z}=\frac{K}{\omega l}=\sqrt{\frac{\varsigma}{l}} \qquad \textit{esc.7.84}$$

Si se utiliza el equivalente serie, las expresiones correspondientes a la corriente y tensión en la línea son:

$$i_i(t)=I_i sen\,(\omega t-Kx)$$

$$v_i(t)=I_i Z sen\big(\,(\omega t+\varphi)-Kx\big) \qquad \textit{ecs.7.85}$$

Aplicando ecs.6.49:

$$-lI_i\omega\cos\,(\omega t-Kx)=-KI_i Z\cos\big(\,(\omega t+\varphi)-Kx\big) \qquad \textit{ecs.7.86}$$

Como en el caso anterior, para x=0 y t=0 se tiene:

$$Z\cos(\varphi)=\frac{\ell\omega}{K}=\sqrt{\frac{l}{\varsigma}} \qquad \textit{ecs.7.87}$$

Las ecs.7.84 y 7.87 relacionan la impedancia de la línea con sus parámetros distribuidos independientemente del modelo utilizado.

Multiplicándolas, y dividiéndolas se obtiene:

$$\varphi=0 \qquad \textit{ecs.7.88}$$

$$Z_i=\sqrt{\frac{l}{\varsigma}} \qquad \textit{ecs.7.89}$$

La impedancia que la línea sin atenuación ofrece al generador es una resistencia de valor dado por ecs.7.89.

Interesa conocer la impedancia de la línea en un punto cualquiera.

$$Z_i(x)=\frac{V_i(x)}{I_i(x)} \qquad \textit{ecs.7.90}$$

Para obtener su expresión utilizando cualquiera de las ecs7.83 o 7.86 con $\varphi=0$ se llega a que en cualquier punto de la línea la impedancia que presenta a la onda incidente, denominada impedancia característica de la línea es la correspondiente ecs.7.89.

Las ecs.7.76 a 7.78 suponen comportamiento inductivo.

Las ecs.7.84 y 7.84 se pueden igualar porque

Si se parte de comportamiento capacitivo se llega al mismo resultado.

Lo mismo ocurre si se utiliza la función coseno en lugar de seno. En este caso habrá que tener en cuenta que

$$sen(\varphi)=-sen(-\varphi)$$
$$\cos(\varphi)=\cos(-\varphi)$$

Impedancia de carga

Cuando la onda incidente llega a la carga, parte de la energía se transmite a esta y el resto se refleja superponiéndose a la onda incidente. El resultado depende de la impedancia conectada en los extremos.

$$v(t,x) = V_i sen\ (\omega t - Kx) + V_r sen\ (\omega t + Kx) \qquad \textit{ecs.7.91}$$

$$i(t,x) = \frac{V_i}{Z_i} sen(\omega t - Kx) + \frac{V_r}{Z_r} sen(\omega t + Kx) \qquad \textit{ecs.7.92}$$

Si la impedancia de carga coincide con la impedancia característica, para la onda incidente la impedancia no se modifica al llegar a la carga y el comportamiento es el mismo al que tendría en una línea infinitamente larga. En estas condiciones, no existe onda reflejada y toda la energía es absorbida por la carga.

Para cualquier otra situación se deberá considerar la onda reflejada. Esta tiene las mismas características que la onda incidente aunque, diferenciándose de esta, avanza en sentido opuesto al asignado a la corriente. Por este motivo, la impedancia característica para la onda reflejada resulta igual a la correspondiente a la onda incidente, con signo opuesto.

$$Z_r = -Z_i \qquad \textit{ecs.7.93}$$

Si los extremos de la línea están unidos, $Z_C = 0$ o en corto circuito, se anula la tensión en la terminación.

$$v_i(t, \mathrm{x_C}) + v_r(t, \mathrm{x_C}) = 0$$

$$V_i sen\ (\omega t - Kx) + V_r sen\ (\omega t + Kx) = 0$$

Estas ecuaciones son válidas para todos los valores de x y t.

Tomando x=0 sobre la carga, se obtiene:

$$V_r = -V_i \qquad \textit{ecs.7.94}$$

Reemplazando el resultado anterior en ecs.7.93,

$$I_r = I_i \qquad \textit{ecs.7.95}$$

Las ondas resultantes sobre la línea responden a las siguientes expresiones:

$$v(t,x) = V_i(sen\ (\omega t - Kx) - sen\ (\omega t + Kx))$$

$$v(x,\mathbf{t}) = -2V_i cos\ (\omega t) sen\ (Kx) \qquad \textit{ecs.7.96}$$

$$i(x,t) = \frac{V_i}{Z_i}(sen\ (\omega t - Kx) + sen\ (\omega t + Kx))$$

$$i(x,t) = 2\frac{V_i}{Z_i} cos(Kx)\, sen\ (\omega t) \qquad \textit{ecs.7.97}$$

Otra situación extrema se tiene cuando no existe carga conectada a la línea.

En una línea a circuito abierto, la corriente en la carga infinita es nula.

$$i_i(t, x_C) + i_r(t, x_C) = 0$$

Resultando

$$I_r = -I_i \qquad \textit{ecs.7.98}$$

$$V_r = V_i \qquad \textit{ecs.7.99}$$

Reemplazando en ecs.7.91 y 7.92

$$v(t,x) = 2V_i \operatorname{sen}(\omega t) \cos(Kx) \qquad \textit{ecs.7.100}$$

$$i(t,x) = -2\frac{V_i}{Z_i} \operatorname{sen}(Kx) \cos(\omega t) \qquad \textit{ecs.7.101}$$

Las ec.s.7.96, 7.97, 7.100 y 7.101 se diferencian de las ecuaciones de onda, ecs.7.66 y 7.67 en los términos dependientes del tiempo y posición están separados. Por este motivo no representan una onda que avanza o progresiva. Son ondas estacionarias, similares a las que se tiene al pulsar la cuerda de una guitarra.

En una onda estacionaria cada punto oscila armónicamente con la misma frecuencia en torno a su posición. La amplitud de la oscilación depende de la posición.

A modo de ejemplo, en la línea a circuito abierto la corriente sobre la carga es nula. Para que esta condición se cumpla, el argumento de la función seno en ecs.7.101 en el extremo abierto, x=L, debe ser un múltiplo entero de π. Así, para una línea de largo L abierta en sus extremos,

$$KL = n\pi$$

Estableciéndose en la línea una onda estacionaria cuya longitud de onda responde a la siguiente expresión:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad \textit{ecs.7.102}$$

Para la condición de ecs.102, los nodos de corriente coinciden con vientres de tensión.

Las ecs.7.100, 7.101 y 7.102 son las mismas que se obtienen para los modos de oscilación de una cuerda fija en ambos extremos. Pulsando la cuerda de una guitarra, todos sus puntos vibran a una frecuencia relacionada con la velocidad de propagación de la onda y longitud de la cuerda. La frecuencia del sonido generado será el mismo aunque la cantidad de modos excitados dependerá de dónde y cómo se la pulse.

El tono percibido será el mismo aunque con diferente contenido armónico o timbre.

Cuando se aparta del equilibrio alguna magnitud eléctrica en una línea de transmisión a circuito abierto, se propaga una onda por la línea que se refleja al llegar al extremo, en este caso abierto.

Igual que en la cuerda, la superposición de la onda reflejada con la incidente origina una onda estacionaria relacionada con el largo de la línea por la ecs.7.102 y la velocidad de propagación, ecs.6.54. Los valores que pueda tomar n dependen del punto en que se produjo la perturbación y definen la forma de la envolvente, marcada mediante trazos en fig.7.30a, representativa de la amplitud de vibración en cada punto de la corriente o tensión.

El comportamiento de una línea excitada por un generador de alterna, es comparable al observado cuando se sube y baja armónicamente el extremo de una cuerda manteniendo fijo al otro extremo. En las experiencias realizadas en clase para visualizar ondas estacionarias en cuerdas, el extremo móvil se acopla a un sistema que le permite describir un movimiento armónico a una frecuencia fija. Para establecer los diferentes modos de oscilación se modifica la velocidad de propagación variando la tensión de la cuerda. De esta manera, se puede ver que solo para determinados valores de la tensión en la cuerda se consigue un patrón estacionario similar al de fig.7.30.

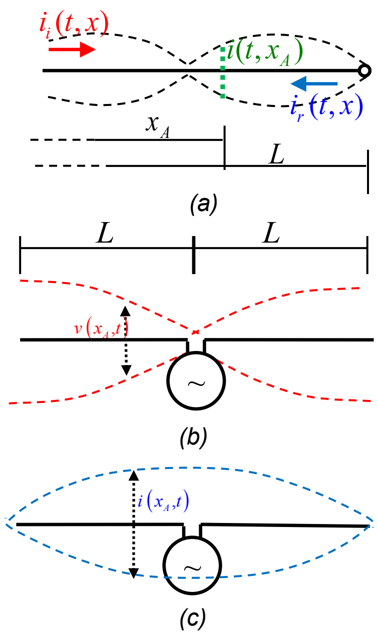


Fig.7.30

Para repetir esta experiencia para una línea de transmisión, debido a que la velocidad de propagación en la misma es fija, se utiliza un generador de alterna de frecuencia variable. De ecs.7.102 puede determinarse el valor que deberá tener la frecuencia del generador para excitar ondas estacionarias en la línea.

$$f_n = \frac{v}{2L} n \qquad n = 1, 2, 3..... \qquad \text{ecs.7.103}$$

El establecimiento de una corriente alterna en un alambre cuya longitud se relaciona con la frecuencia del generador mediante ecs.7.103, origina ondas estacionarias en las que la velocidad de propagación es la correspondiente a ecs.6.54.

En la fig.7.30.b y c se muestra el patrón obtenido para un alambre cuya longitud corresponde a un cuarto de la longitud de onda generada[1] indicando con línea de puntos para una posición cualquiera x_P, los diferentes valores de la tensión y corriente a medida que transcurre el tiempo.

En la misma se puede comprobar que todo el tiempo la corriente es nula en los extremos, alcanzando su máxima amplitud en la parte central.

Esta disposición se conoce con el nombre de antena resonante y es una de las posibles variedades de antenas utilizadas para radiar energía electromagnética al exterior o capturarla cuando es convenientemente colocada en la trayectoria seguida por una onda electromagnética. Con una codificación preestablecida es posible transportar mensajes, en este caso sin necesidad del soporte material de un cable.

[1] El conjunto se denomina dipolo de media onda.

La tensión tiene un nodo que coincide con el vientre de corriente y alcanza su máximo valor en los puntos donde la corriente es nula.

El concepto de capacidad distribuida introducido en fig.3.6 y utilizado en fig.6.21, permite asegurar que la carga se distribuye a lo largo de la línea con un patrón similar a la tensión. En la línea considerada, la carga oscila armónicamente en cada posición entre máximos positivo y negativo con magnitud dependiente de la posición en la línea (ecs.7.96). Cuando es positiva en el lado derecho, igual cantidad de carga negativa se tiene en el lado izquierdo.

En determinado momento la tensión (y la carga) se anulan simultáneamente en todos los puntos de la línea para invertir su polaridad, manteniéndose en todo momento la neutralidad de cargas en el conductor.

Lo que sigue

Como resultado de la circulación de una corriente variable en el tiempo por el alambre se obtienen campos eléctrico y magnético a su alrededor.

El campo magnético originado por la corriente, en el espacio afuera del alambre origina un campo eléctrico. Nada sabemos sobre qué ocurre fuera del alambre con el campo eléctrico generado por las cargas variables en sus extremos. Este es el punto en que los circuitos por si solos no permiten una explicación, debiéndose recurrir a la teoría de campo. La misma predice que campos eléctricos variables en el tiempo originan campos magnéticos y si estos son variables en el tiempo, originan nuevamente campos eléctricos y así siguiendo. Un campo engendra al otro y este al primero. ¿Qué sucede con la energía contenida en los mismos? ¿Permanece confinada en una región como en los ejemplos considerados o puede "escapar" de ella?

En la segunda parte del libro se trata este tema. Para ello debemos regresar al principio, revisando los temas tratados desde el punto de vista de los campos.

Dependiendo de la frecuencia, las ondas electromagnéticas interactúan con la materia permitiendo aplicaciones en diferentes campos, entre ellos biología, física y química.

Siendo la luz una onda electromagnética, aplicaciones relacionadas como las que utilizan fibras ópticas, basan el transporte de energía e información en las ondas electromagnéticas.

ACTIVIDADES

7.1 Un circuito RLC serie está conectado a una fuente de tensión de 10V de amplitud frecuencia 1KHz. La resistencia es de 100 Ω y la inductancia de 32mHy.

a) Si la corriente tienen 92,2mA de amplitud y está atrasada respecto de la tensión aplicada ¿Cuál será el valor de la capacidad?

b) Repita a) considerando que la corriente está adelantada respecto de la tensión.

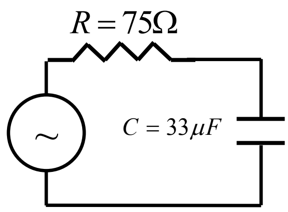


Fig.7.31

7.2 Cuando se conecta un inductor a una fuente de tensión continua de 5V circula una corriente de 89,5 mA, mientras que si se lo conecta a una tensión alterna de 10V de amplitud y 50 HZ de frecuencia, la corriente resulta ser de 43,2 mA. Calcule la resistencia e inductancia del equivalente serie del inductor.

7.3 Para el circuito de fig.7.31 $v(t) = 12sen(1400t)$.

a) Calcule la amplitud de la corriente y diferencia de fase con la tensión aplicada y utilice el resultado para expresar la corriente en función del tiempo.

b) Repita a) para la tensión sobre el capacitor.

7.4 Un capacitor y una resistencia se conectan en paralelo a una fuente de tensión alterna con 15 V de amplitud y 400Hz de frecuencia. La amplitud de la corriente entregada por el generador es 45mA mientras que en la resistencia es 40mA.

a) Calcule la amplitud de corriente por el capacitor.

b) Determine el valor de la capacidad.

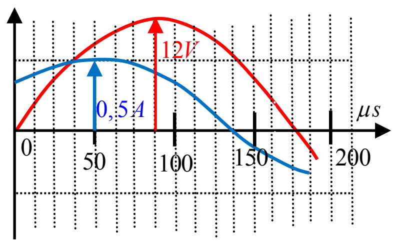


Fig.7.32

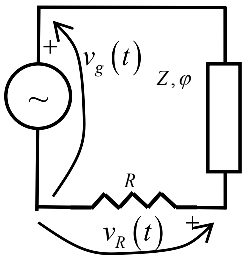
7.5 En fig.7.32 se muestra la variación temporal de la corriente a través de una impedancia y la diferencia de potencial entre sus extremos. La impedancia está formada por una resistencia en serie con una reactancia.

a) Calcule el periodo, frecuencia, módulo y diferencia de fase de la impedancia y potencia disipada.

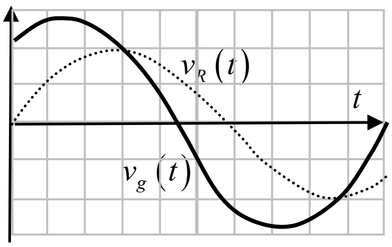
b) Realice el diagrama fasorial correspondiente y utilícelo para calcular R y C o L según corresponda.

7.6 Repita el ejercicio anterior para el caso en que se quiera representar la impedancia por una resistencia en paralelo con una reactancia.

7.7) Aplicando las ecs.7.48 y 7.49 a la resistencia y reactancia serie del ejercicio 7.5, compruebe el resultado obtenido para el equivalente paralelo del ejercicio 7.6.



(a)



(b)

Fig.7.33

7.8) En fig.7.33b se indica con trazo fino la diferencia de potencial en extremos de una impedancia conectada al generador de corriente alterna de fig.7.33a y con trazo grueso la tensión sobre la resistencia R=10 Ω.

En el eje horizontal, cada división corresponde a 20 μs y en el vertical, para el trazo fino 1V mientras que para el trazo grueso 2 V por división. Calcule:

a) El periodo y frecuencia.

b) El valor eficaz de la diferencia de potencial y corriente.

c) La impedancia y diferencia de fase expresada en grados indicando si es inductivo o capacitivo.

d) Realice el diagrama fasorial y calcule el valor de R_S y L_S o C_S según corresponda considerando que los componentes están conectados en serie.

e) Repita el inciso anterior para determinar R_P y L_P o C_P considerando que los componentes están conectados en paralelo.

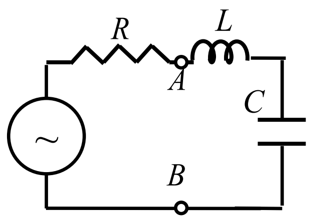


Fig.7.34

7.9) Para el circuito de fig.7.34 realice el diagrama fasorial indicando claramente el fasor representativo de la amplitud de ten V_{AB} para:

a) Frecuencias por debajo de la resonancia.

b) En resonancia.

c) Frecuencias por encima de la resonancia.

7.10 En el circuito de fig.7.35, $v(t)$ es una tensión sinusoidal cuya frecuencia angular es 100 rad/s, $R_1 = 10\Omega,\ R_2 = 32\Omega$ y $C_1 = 200\mu F.$

Calcule la potencia disipada en R_1 cuando el valor eficaz en placas de C_1 es 100V.

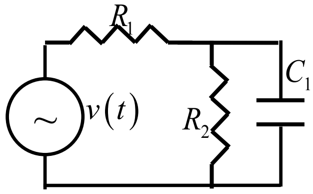


Fig.7.35

7.11) Una resistencia se conecta a una fuente de tensión continua V_0. Escriba la expresión de la potencia disipada en la misma y utilice el valor hallado para determinar la amplitud de una tensión alterna que permita disipar sobre dicha resistencia igual cantidad de energía por ciclo.

7.12 Un motor de alterna tiene los siguientes valores nominales de funcionamiento:

Tensión: 220V, frecuencia 50Hz, Potencia 1KW, Factor de potencia 0,7.

a) Calcule la corriente a través de su bobinado.

b) Calcule el módulo de su impedancia y los valores de R y L para el equivalente serie.

c) Realice el diagrama fasorial correspondiente.

d) Evalúe la capacidad necesaria para compensar totalmente el factor de potencia si se la conecta en serie con el motor y determine la tensión y corriente que se tendría en el mismo en estas condiciones. Realice un esquema del circuito y diagrama fasorial correspondiente.

e) Repita el inciso anterior para el caso en que el capacitor de compensación de coloque en paralelo con el motor.

f) Basándose en los resultados obtenidos, justifique por qué siempre el capacitor de compensación se conecta en paralelo.

7.13 a) Considere un circuito RLC serie. Utilice la ecs.7.21, para hallar la expresión en función del tiempo de la potencia en la inductancia y en la capacidad.

b) Grafique ambas magnitudes en función del tiempo.

c) Así como la expresión matemática para potencia activa se obtuvo dividiendo la energía promedio en un ciclo sobre la duración del mismo, ecs.7.59, se podría proceder de manera similar para la potencia reactiva. De la gráfica del inciso anterior podrá deducir que, no obstante la potencia reactiva en un ciclo es nula, tiene valores que pueden promediarse durante intervalos de un cuarto de ciclo.

Evalúe ecs.7.64 entre 0 y T/4. Dividiendo el resultado por T/4 obtendrá una expresión similar a la potencia reactiva Q obtenida de fig.7.22b.

7.14 En fig.7.36a se muestra una espira cuadrada de lado ℓ aislada eléctricamente de dos rieles paralelos sobre los que puede deslizarse y un campo magnético B uniformemente distribuido normalmente al plano de la espira abarcándola completamente.

a) Considerando que el imán generador del campo se desplaza paralelamente a los rieles con velocidad v_0, determine la f.e.m. inducida luego de transcurrido un intervalo dt, fig.7.36b.

b) Determine la corriente por la espira de resistencia eléctrica R y la fuerza resultante sobre la misma.

c) Suponiendo que la espira comienza a moverse, explique si lo hará siguiendo al imán o en sentido contrario.

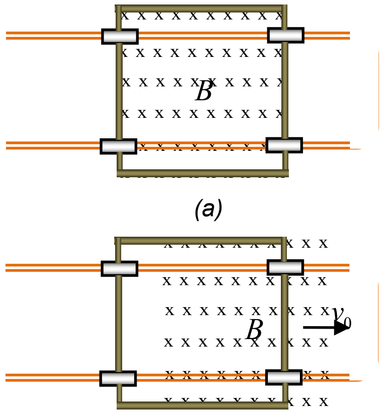


Fig.7.36

7.15 La espira del ejercicio anterior, que se desplaza en estado estacionario con velocidad v, $v<v_0$, transporta un objeto colocado sobre ella. Indicando con F_{roz} a la fricción con los rieles originada por la masa m de la espira más la de la carga desplazándose con velocidad v:

a) Exprese en función de los datos del ejercicio la f.e.m. inducida, corriente y fuerza magnética sobre la espira.

b) Escriba la ecuación de movimiento de la espira y utilícela para expresar su velocidad de estado estacionario en función de v_0 y demás datos del ejercicio.

c) Resuelva la ecuación de movimiento y encuentre la expresión para $v(t)$ a partir del instante indicado en fig.7.36a.

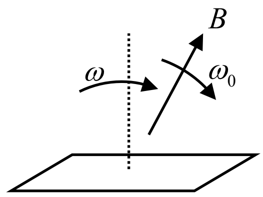
Compruebe el resultado obtenido para $t \to \infty$ con el hallado en el inciso a.

d) Exprese en función de los datos del problema la constante de tiempo con que la velocidad de la espira llega al estado estacionario.

7.16 a) Para la espira del ejercicio anterior exprese F_{roz} en función de la diferencia de velocidades $(v_0 - v)$, donde v es la velocidad de estado estacionario de la espira y utilícela para expresar la potencia mecánica desarrollada por la espira en función de v y v_0.

b) Determine la velocidad para la que se obtiene el máximo valor de potencia y utilícela para estima la máxima poten-

cia que se puede obtener con este dispositivo.



7.17 Un campo magnético B gira en el plano de la figura con velocidad angular ω_0 atravesando una espira cuadrada de lado ℓ y resistencia óhmica R que gira siguiendo al campo con velocidad angular ω, $\omega < \omega_0$. (fig.)

a) Encuentre la expresión de la corriente inducida en la espira.

b) Exprese en función del tiempo el par de giro de la espira.

APÉNDICE

VISUALIZACIÓN DE MAGNITUDES VARIABLES EN EL TIEMPO

En los últimos capítulos se pudo comprobar que existen muchas aplicaciones con circuitos eléctricos donde las magnitudes eléctricas intervinientes sufren modificaciones en intervalos de tiempo suficientemente pequeños para ser detectados por la posición de la aguja de un instrumento o presentados en tiempo real en una pantalla en forma digital. Aún para los circuitos de corriente alterna, que pueden caracterizarse determinando la amplitud y fase de las magnitudes intervinientes, los instrumentos de medida utilizados tienen que ser capaces de detectarlas cuando su frecuencia es elevada.

Cuando se necesita determinar la respuesta de un circuito donde el resultado es una función periódica formada por la superposición de funciones sinusoidales con diferentes frecuencias o una función aperiódica, como ocurre al dejar que el circuito responda libremente después de haber sido perturbado, surge la necesidad de utilizar instrumental que muestre la variación temporal de la magnitud o "señal" bajo ensayo.

Magnitudes variables en el tiempo

Sistemas relacionados con las diferentes especialidades en ingeniería, muchas veces pueden ser representados por ecuaciones diferenciales similares a las obtenidas en el tratamiento de circuitos eléctricos. Por este motivo, diferentes situaciones en mecánica, física, biología, química, aeronáutica, etc. pueden simularse mediante circuitos eléctricos equivalentes.

Otra característica común entre los circuitos eléctricos y las demás especialidades es que diferentes magnitudes pueden convertirse en eléctricas y estas en las primeras permitiendo su medición en el primer caso y control en el segundo. La modificación en el tiempo de las mismas origina una diferencia de potencial o una corriente eléctrica con igual dependencia temporal. Por este motivo, para las diferentes especialidades de la ingeniería es necesario, además de la resolución de circuitos eléctricos, conocer el manejo de este tipo de instrumental, sus características y limitaciones, como también poder interpretar las visualizaciones obtenidas.

En el diseño de un sistema, el equivalente eléctrico de las magnitudes intervinientes como puede ser una masa, muelle o amortiguador, permite modificar estos parámetros cambiando el valor de una inductancia, capacidad o resistencia en el circuito equivalente del dispositivo. De esta manera es posible determinar el comportamiento del sistema frente a diferentes tipos de solicitaciones antes de encarar el diseño del mismo.

La resolución de estos circuitos junto con su implementación y prueba en el laboratorio constituyen una manera posible de iniciar un proyecto.

Voltímetros y amperímetros

Los instrumentos utilizados para medir magnitudes variables en el tiempo, además del valor de la magnitud medida deben proveer información del instante en que se realizó la medida. Por este motivo, instrumentos similares a voltímetros y amperímetros utilizados en continua dejan de tener utilidad, salvo para el caso de corriente alterna, que como se vio en el capítulo anterior, se puede caracterizar mediante la amplitud, frecuencia y fase.

Magnitudes que se repiten periódicamente, pueden ser caracterizadas por el valor eficaz. Por ser la variación sinusoidal la más comúnmente utilizada, la indicación de estos instrumentos se refiere al valor cuadrático medio de la función sinusoidal y se conocen con el nombre genérico de instrumentos de corriente alterna.

Estos instrumentos, dentro del rango de frecuencias especificado para su utilización, permiten conocer el valor eficaz en alterna independientemente del valor de la frecuencia y fase de la misma.

Para señales periódicas en general la medida deberá ser afectada por un factor de conversión que, dependiendo de la manera en que el instrumento realiza la medida, será función de la relación entre los valores eficaces de la señal medida y el correspondiente en alterna.

De ser necesaria información sobre diferencias de fase entre señales sinusoidales o para visualización de señales con cualquier otra forma de dependencia en el tiempo, el instrumento deberá permitir la representación temporal de la magnitud que está siendo medida.

Determinaciones en función del tiempo

Los instrumentos utilizados para medir magnitudes variables en el tiempo tienen que ser capaces de realizar una presentación temporal de la misma dentro del error especificado, tanto para la magnitud medida como para el instante en que se realiza la determinación.

A modo de ejemplo, si se desea visualizar un ciclo de corriente alterna de la línea de distribución de energía eléctrica, el tiempo de la representación será de veinte milisegundos mientras que, para representar el transitorio en un circuito RL, según la constante de tiempo del mismo, el intervalo de medida podrá ser del orden de los nanosegundos o inferior.

Dependiendo de la experiencia realizada, los intervalos de tiempo involucrados varían ampliamente.

Los instrumentos para este tipo de determinaciones se diferencian en la manera en que convierten la señal medida en una magnitud posible de representar en función del tiempo y en la forma de realizar dicha representación, pudiéndose considerar tres grupos: analógicos, analógicos-digitales y digitales.

Los osciloscopios, utilizados en el laboratorio y taller comprenden los tres grupos mencionados mientras que el último grupo comprende también a los sistemas de adquisición de datos.

Instrumentos digitales

En la actualidad existe una gran variedad de instrumentos electrónicos basados en la toma de muestras de la magnitud física que está siendo medida, generalmente transformada en una diferencia de potencial eléctrico variable en el tiempo.

Las muestras están formadas por el valor del potencial de la señal en el instante en que se realiza la medida, siendo la duración de la misma un intervalo de tiempo muy pequeño denominado tiempo de adquisición.

El muestreo se realiza a intervalos regulares de tiempo, suficientemente pequeños para obtener una cantidad considerable de valores representativos de la porción a observar.

La conversión en un número proporcional a la magnitud del potencial adquirido en cada toma de muestra, es el "dato" almacenado en una memoria que posteriormente se utiliza para presentar gráficamente en función del tiempo con las escalas correspondientes.

Como podrá comprenderse, en este tipo de instrumentos la señal a observar, convertida a un conjunto de datos numéricos debe ser "reconstruida" para su presentación en una pantalla.

La manera en que el potencial medido es transformado en un número es similar a la medida de la altura de una persona parada junto a una escalera y expresada por el número de escalones hasta donde llega.

El salto entre escalones será el error absoluto con que se expresa dicha medida.

En los instrumentos digitales esta comparación la realiza el conversor analógico-digital (CAD) y la magnitud del salto entre escalones es definido por el número de bits n, mediante la relación $\Delta V = Alcance/2^n$.

Cuando se visualizan señales periódicas es posible reconstruir la forma de la misma tomando muestras de ciclos sucesivos, ampliando considerablemente la máxima frecuencia de la señal capturada o ancho de banda del instrumento de medida.

Aunque esta y otras facilidades brindadas por este tipo de instrumental amplían considerablemente su potencialidad, los resultados obtenidos muchas veces dependen de la experiencia del operador. La utilización de instrumentos en los que la presentación del resultado acompaña a los cambios que realiza el operador (“presentación en tiempo real”) es aconsejable principalmente para operadores con poca experiencia.

Por ejemplo, en la escala de 1V, la menor variación de potencial que puede discriminar un CAD de 10 bits (1024 escalones) es cercana a 1mV mientras que, para un CAD de 12 bits (4096 escalones) es de 0,25 mV.

La definición con que se determina el instante de toma de muestra debe ser acorde con la correspondiente a la del potencial medido. Para el primer caso en el ejemplo considerado y suponiendo que el alcance en la escala de tiempos es 1ms, la separación entre muestras será del orden de un microsegundo mientras que para mantener en el tiempo una resolución equivalente a 12 bits, el tiempo transcurrido entre una muestra y la otra deberá ser, p<ra el alcance mencionado, de 0,25 μs.

Estos valores pasan a ser de nano segundos cuando se reduce el alcance a un microsegundo, tiempo en el que entraría justamente un ciclo de corriente alterna con 1MHz de frecuencia.

Instrumentos analógicos

Existe otro tipo de instrumentos en que la magnitud que está siendo medida actúa sobre la presentación en pantalla en el mismo instante que esta ocurre. En los osciloscopios analógicos, la presentación de la magnitud a observar se realiza en tiempo real, sin reconstrucción o procesamiento. A diferencia de los sistemas digitales en que la presentación está formada por una sucesión de puntos, en los osciloscopios analógicos es una curva continua.

Debido a que es posible describir el principio de funcionamiento de estos instrumentos con los conceptos tratados en capítulos anteriores y principalmente porque para el operador novato las representaciones en tiempo real son más fáciles de interpretar, los ejemplos de este capítulo se refieren a la utilización de osciloscopios analógicos.

Osciloscopio analógico

La representación de señales de corta duración siempre requiere algún tipo de almacenamiento previo a su visualización. Afortunadamente la mayoría de aplicaciones con circuitos eléctricos responden de la misma manera frente a la repetición de una excitación. Así, repitiendo periódicamente una función aperiódica se obtienen sucesivas presentaciones de la misma forma.



(a)



(b)

Fig.8.1

En el osciloscopio analógico se provee de controles para lograr que estas presentaciones se superpongan dando una imagen estable que puede ser percibida por el ojo humano.

La diferencia con la presentación obtenida en sistemas puramente digitales es que en el analógico cualquier modificación introducida por el operador es inmediatamente advertida como un cambio en la presentación mientras que en los digitales existe un retardo debido al tiempo necesario para la lectura de los datos previamente almacenados.

Este es el sentido de "presentación en tiempo real" mencionado para los sistemas analógicos y que facilita su utilización.

Para utilizar este tipo de instrumental, aprovechando las posibilidades brindadas por el mismo, es necesario conocer las bases de su funcionamiento.

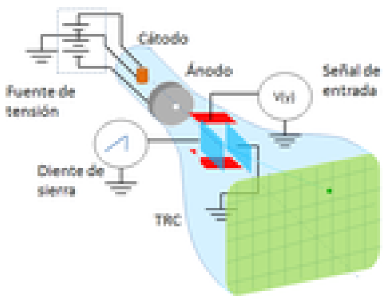
Principio de funcionamiento

El osciloscopio, fig.8.1a, es un instrumento de medida que permite visualizar la evolución de señal eléctrica con el transcurso del tiempo. El dispositivo que permite convertir la señal en imagen en los osciloscopios analógicos es el tubo de rayos catódicos, fig.8.2a.

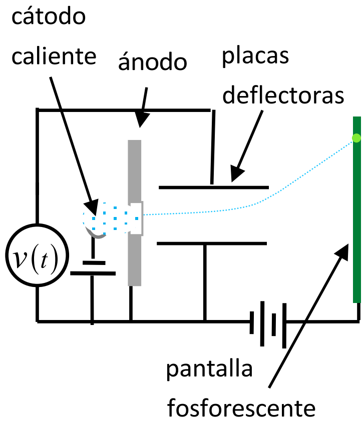
Un cátodo caliente emite electrones (fig.2.22) que son acelerados y enfocados de modo que son registrados como un pequeño punto al chocar contra una pantalla de vidrio, recubierta con material fosforescente.

Si se aplica una diferencia de potencial entre las placas de deflexión a través de las que pasa el haz de electrones (fig.8.2.b), la fuerza electrostática hará desviar el haz modificando la posición en que se hace visible el punto (fig.8.1b).

Diferentes valores de la señal a visualizar, excitarán diferentes puntos de la pantalla dejando un trazo luminoso que persiste el tiempo suficiente para que pueda ser retenido por el ojo humano.



(a)



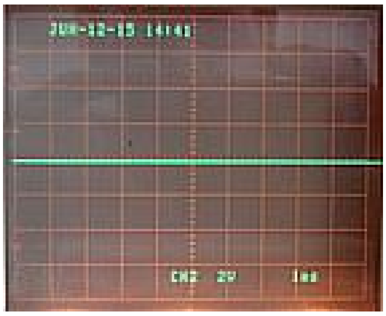
(b)

Fig.8.2

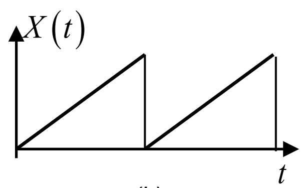
Barrido horizontal

Con el fin de tener una representación ortogonal, se disponen dos pares de placas de deflexión en ángulo recto entre sí permitiendo de esta manera enfocar el haz en un punto cualquiera de la pantalla con desplazamientos independientes en sentido horizontal y vertical. Una cuadrícula sobre la pantalla permite determinar la posición del punto, denominándose división a cada intervalo definido por la misma. Cada división comprende cinco subdivisiones menores.

Normalmente se representan señales en función del tiempo. Para obtener el eje horizontal de tiempo, se debe establecer entre las placas de deflexión horizontal una diferencia de potencial linealmente creciente en el tiempo. De esta manera, el haz de electrones se desplaza de izquierda a derecha por la pantalla con velocidad constante (barrido horizontal), produciendo un trazo horizontal (fig.8.3.a) resultando, la posición horizontal del punto luminoso, directamente proporcional al tiempo. Alcanzado el extremo derecho de la pantalla, el punto debe regresar rápidamente al extremo izquierdo para iniciar un nuevo barrido. Esto se logra aplicando una señal como la mostrada en fig.8.3b, denominada “diente de sierra”. La repetición periódica del barrido permite presentar una figura estable cuando las señales a visualizar se repiten en intervalos regulares de tiempo.



(a)



(b)

Fig.8.3

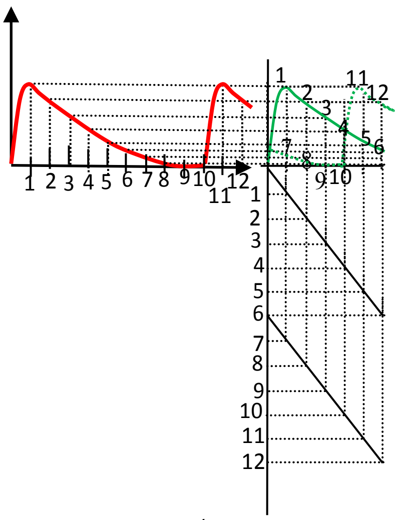
Por medio de una perilla se puede elegir el tiempo requerido para que el punto se desplace horizontalmente de un extremo al otro de la pantalla, modificado el alcance en la escala de tiempos o "base de tiempo del osciloscopio".

Algunos modelos de osciloscopio permiten el ingreso de una señal externa de barrido posibilitando representaciones x-y. Existen diferentes maneras de acceder a esta posibilidad. En el instrumento utilizado para estos ejemplos, la señal aplicada al canal 2 controla el desplazamiento horizontal del haz cuando se gira perilla de base de tiempos hacia el extremo más lento.

Fuente de disparo

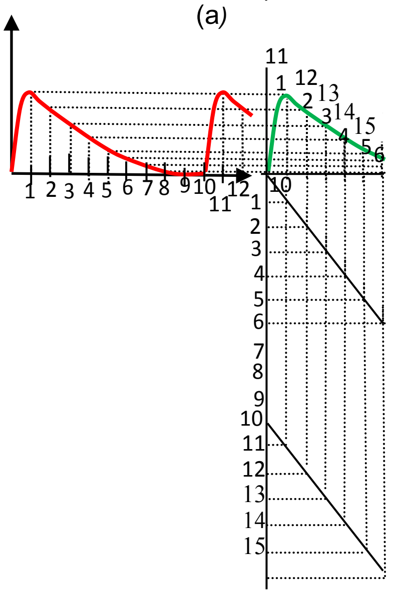
Con el fin de seleccionar en el eje de tiempos un punto de comienzo apropiado para la presentación de la señal en pantalla, se emplea un circuito de disparo. Este circuito establece el origen de tiempos permitiendo superponer la imagen de sucesivos ciclos de una señal repetitiva.

En fig.8.4a se considera la presentación de dos ciclos de una señal repetitiva cuando el barrido no está sincronizado. En este caso, el comienzo del segundo barrido en el punto 6, no corresponde al mismo punto de la señal periódica a representar. El resultado es una forma idéntica a la señal observada, que no mantiene una posición estable, avanzando hacia izquierda o derecha de la pantalla.



(*a*)

Con el fin de obtener una figura estable, es necesario comenzar el barrido horizontal en los mismos puntos de los diferentes ciclos de la señal repetitiva de entrada. En fig.8.4b se sincroniza el inicio de cada barrido con el inicio de la parte creciente del pulso o "flanco de subida". El punto indicado con 10 corresponde al inicio del segundo barrido o "punto de disparo". La superposición de los sucesivos ciclos permite obtener una imagen con la persistencia suficiente para ser detectada por el ojo humano. Para sincronizar el comienzo del barrido con la señal a visualizar, el diente de sierra puede ser iniciado por la misma señal de entrada o por una señal externa relacionada con ella.



(*b*)

Fig.8.4

En la mayoría de los osciloscopios es posible elegir entre disparo interno (señal de entrada), externo o línea. El disparo externo se utiliza cuando la señal a observar es de muy bajo nivel o cuando se deben observar señales en diferentes puntos del mismo circuito. Cuando la señal a observar está relacionada con la frecuencia de línea (50Hz en nuestro país), es conveniente utilizar la línea como fuente de disparo.

Modo de disparo

El barrido puede iniciarse automáticamente o no, seleccionado mediante una perilla con las posiciones AUTOMÁTICO/NORMAL.

En el modo automático se utiliza la fuente de disparo interno y en el caso de ausencia de señal, el barrido se repite periódicamente. De esta manera en todo momento existe una imagen en pantalla.

Este modo permite ubicar la presentación en el espacio de pantalla cuando, debido la magnitud de la señal a observar, el haz de electrones se desvía fuera de la misma.

Una vez posicionada la señal dentro de la pantalla, mediante el ajuste de la velocidad del barrido y amplificación del canal de entrada, es posible conseguir una presentación con la mayor amplitud posible. De ser necesario, se expande la escala de tiempos para visualizar la parte en la que se tenga interés.

Por ejemplo, si se quiere observar una señal sinusoidal, es conveniente que el ancho de la pantalla comprenda parte o la totalidad de un ciclo en lugar de mostrar diez o veinte ciclos iguales.

Una vez ubicada la señal en la pantalla, si permanece fija y la zona de interés es visible, se realizan las mediciones necesarias.

Si la parte de interés no aparece por ocurrir antes o después de los límites del ancho de pantalla, es posible desplazar la presentación hacia uno u otro lado manteniendo la forma, mediante una perilla de desplazamiento continuo, indicada como DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL u OFFSET.

En muchos osciloscopios esta perilla tiene además una indicación de expansión horizontal (PULLX10) mediante la que se logra expandir la escala de tiempos, mostrando la parte central de la señal en una escala de tiempos diez veces menor.

Cuando no es posible visualizar la parte de interés o no se consigue estabilizar la forma presentada en pantalla se debe recurrir al modo NORMAL de disparo, que permite elegir la fuente y nivel de disparo. De esta manera, se puede comenzar el barrido a partir del flanco de subida o bajada de la señal de disparo y cuando el valor de esta supera determinado nivel. Esta opción junto con las posibles fuentes de disparo y la expansión de la escala de tiempos amplían considerablemente las posibilidades que brinda este instrumento.

En fig.8.5a se muestra la presentación obtenida para fuente de disparo interno (la señal a observar se utiliza como fuente de disparo), modo normal y flanco positivo.

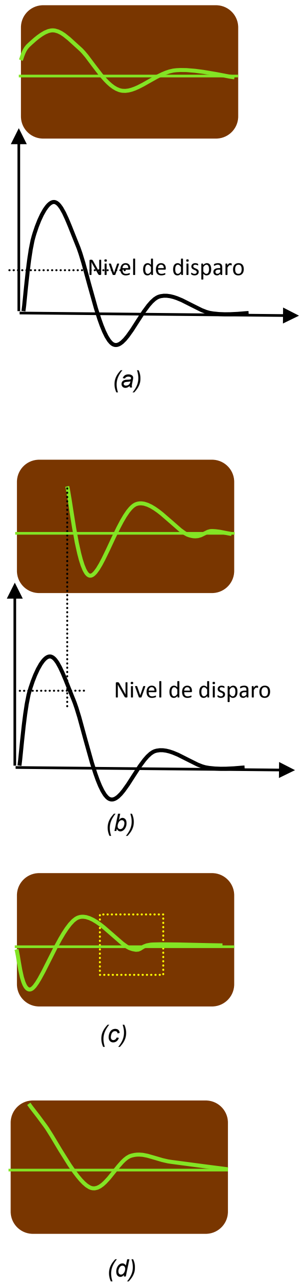


Fig.8.5

La escala de tiempos seleccionada permite ver parte de la señal.

En fig.8.5b se conmutó a disparo con flanco negativo y se modificó el nivel de disparo. Para mejor observación del segundo pico negativo de la señal bajo observación, se modificó el selector de alcance vertical.

En fig.8.5c, se desplaza hacia la izquierda la forma presentada, ubicando en el centro de la pantalla la zona de interés (indicada en la figura mediante un recuadro). A continuación se la expande horizontalmente (modificando el barrido o mediante la expansión x10) y se amplifica verticalmente hasta obtener la presentación definitiva (fig.8.5d).

Ingreso de señales

Las entradas de los amplificadores de un osciloscopio están diseñadas para detectar el potencial de la entrada de señal respecto a un valor común a las diferentes entradas o canales que posea el instrumento. Debido a que este punto común suele conectarse a la tierra del sistema, se indica con las siglas GND o TIERRA.

Si se dispone solamente de un terminal de entrada por canal (entrada asimétrica), se pueden medir señales referidas al potencial de tierra.

Algunos amplificadores tienen dos entradas por canal de modo que las entradas de cada canal, referidas a tierra, pueden sumarse o restarse electrónicamente. Este tipo de entrada se denomina diferencial ya que permite medir la diferencia de potencial entre dos nodos.

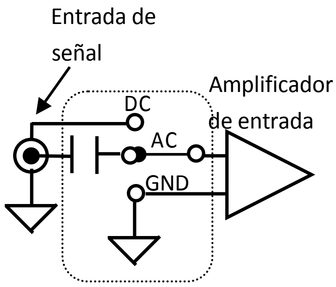


Fig.8.6

Por medio de una llave AC/DC se puede seleccionar el acoplamiento entre la señal de entrada y el amplificador (fig.8.6).

En la posición DC toda la señal de entrada ingresa al amplificador y después de ser amplificada se aplica a las placas de deflexión del TRC.

En la posición AC un capacitor bloquea la componente de continua de la señal permitiendo que lleguen al amplificador las componentes de alterna por encima de una frecuencia mínima, del orden de 20Hz. Esta posibilidad se utiliza cuando se desea observar una señal variable de pequeña amplitud superpuesta a un nivel de continua.

Normalmente se prefiere usar la posición DC por permitir mejor respuesta en bajas frecuencias.

A veces existe una tercera posición de la llave de ingreso de señal, (GND, OFF) que se utiliza para desconectar el terminal de entrada al amplificador poniendo dicha entrada a tierra.

En fig.8.7 se esquematiza una posible aplicación en la que conviene eliminar la componente de continua de la señal.

En fig.8.7b se utiliza la máxima amplificación con la que es posible visualizar completamente la señal de entrada.

Aumentando la ganancia, parte de la señal sale fuera de la pantalla y la que queda aún es demasiado pequeña para poder realizar alguna medición (fig.8.7c). Conmutando el selector de entrada a la posición AC es posible amplificar la parte de interés (fig.8.7d).

Las conexiones a las entradas del osciloscopio se realizan mediante puntas especialmente diseñadas para optimizar la respuesta en frecuencia del amplificador (fig.8.8).

A menudo las puntas tienen la indicación X10 debido a que atenúan diez veces la señal antes de ingresarla al amplificador. En estos casos se debe multiplicar por 10 el valor indicado en la perilla de sensibilidad correspondiente.

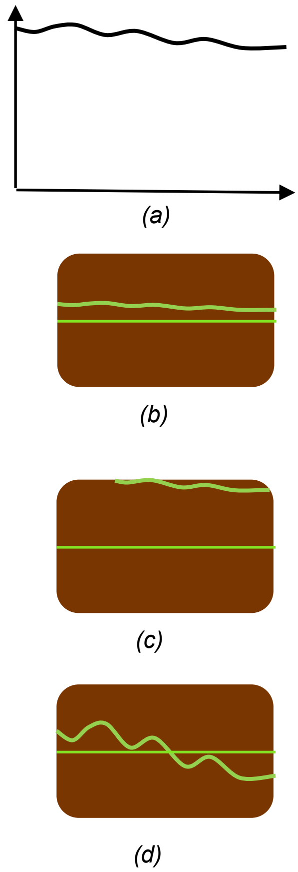


Fig.8.7

Modo de presentación

Generalmente los osciloscopios poseen dos canales de entrada idénticos, pudiendo mostrarse en pantalla por separado o superpuestos.

La elección del modo de presentación se realiza mediante una llave con las indicaciones canal1/canal2/ALT/CHOP.

Las posiciones ALT y CHOP permiten observar ambas señales superpuestas.

En la posición ALT se muestra el barrido completo de un canal por vez con una alternancia suficiente para permitir que el ojo humano vea ambas curvas superpuestas.

En la posición CHOP (chopeado / trozado), se muestran intervalos sucesivos de ambas curvas. Como resultado, se observan pedazos de cada señal como si se tratara de una línea de trazos.

La elección de uno u otro modo depende de la duración del barrido. Si es demasiado lento en el modo alternado se verá una presentación por vez (parpadeo), debiéndose recurrir al trozado para poder visualizar ambas gráficas simultáneamente.


Fig.8.8

Controles adicionales

Además de los mencionados, existen otros controles a tener en cuenta, algunos se presentan en todos los modelos de osciloscopios como son los que se ocupan de controlar la intensidad y tamaño del haz y luminosidad de la pantalla. Otros son particulares según la marca y modelo del instrumento considerado.

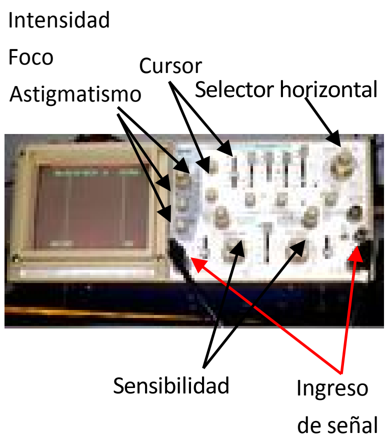


Fig.8.9

El osciloscopio utilizado para los ejemplos en este capítulo tiene utilidades adicionales entre las que se puede mencionar un cursor con presentación numérica de los valores de potencial y tiempo correspondientes a su posición. La ubicación de los controles y el nombre utilizado para identificarlos depende de la marca y modelo del instrumento. En fig.8.9 se indica la ubicación de los principales controles utilizados en los ejemplos del capítulo.

Utilización

Puesta en funcionamiento

Después de encender el instrumento, con los controles en la posición indicada en la tabla 8.1, tendría que aparecer una imagen en la pantalla.

Si transcurridos unos segundos no aparece un trazo o punto visible en la pantalla, se deberán ajustar los controles de posición vertical y horizontal hasta lograrlo. Estos controles permiten modificar la posición en que impacta el haz sobre la pantalla.

A veces, la perilla de control de intensidad quedó en una posición en la que el trazo no es visible. Girándola en sentido horario hacia la posición de máxima intensidad permitirá comprobar si es esta la causa por la que no se encontraba el trazo. Si aún así no aparece y habiendo verificado que los controles de modo, canal entrada y disparo son los indicados en la tabla, el ajuste de los controles de posición le permitirá ubicar el haz en el centro de la pantalla.

Modo de presentación	Canal 1
Selector de entrada/ Canal1	GND
Modo de disparo:	AUTO
Fuente de disparo:	Interna/ Canal 1

Tabla 8.1

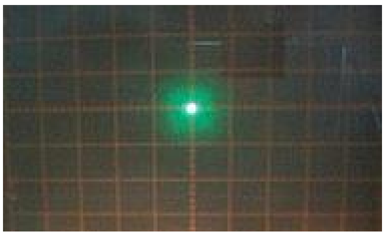
No es conveniente dejar demasiado tiempo al haz incidiendo en el mismo punto de la pantalla debido a que puede dejar manchas permanentes en la misma.

Ajuste del trazo

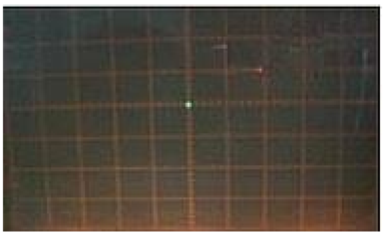
En el panel frontal del osciloscopio existen controles, (INTENSIDAD, FOCO y ASTIGMATISMO), que permiten ajustar la intensidad y dimensiones del punto en la pantalla.

Con la perilla de selección de entrada al canal puesta en GND y la perilla de base de tiempo en la posición "XY" o en la correspondiente al barrido más lento, se observa un punto que puede llevarse al centro de la pantalla con los controles de desplazamiento vertical y horizontal.

Cuando la intensidad del haz de electrones es excesiva, se observa un "halo" alrededor del punto (fig.8.10a) que se corrige con el control de intensidad. A continuación, mediante los controles de foco y astigmatismo se modifica la forma del punto hasta conseguir un círculo pequeño (fig.8.10b).



(a)



(b)

Fig.8.10

De esta manera, al producirse el barrido se tendrá un trazo delgado mejorando la determinación de los valores medidos. Si el trazo el muy débil se podrá aumentar su intensidad corrigiendo levemente el control correspondiente.

Ajustes iniciales

Girando la perilla de base de tiempo hacia la posición X-T se observará que el punto comienza a desplazarse horizontalmente. Aumentando la velocidad de barrido se podrá observar una línea horizontal o "línea de base".

Cuando el selector de entrada se encuentra en la posición GND, la señal aplicada al sistema de deflexión vertical es nula, de modo que la línea de base indicará el potencial cero. Mediante la perilla de nivel es posible colocar la línea de base en la mitad de la pantalla. Esta operación se repite para ambos canales.

Aumentando la sensibilidad de entrada del canal (V/div) se comprueba si la presentación se mantiene en el centro la línea de base. En caso necesario, deberá corregir la posición de cero de la misma cada vez que necesite modificar el alcance vertical del instrumento (o recurrir a personal técnico especializado para calibrar el instrumento).

Prueba de funcionamiento

La realización de algunas determinaciones sencillas que, dentro de lo posible puedan contrastarse con otro instrumental, además de ser una guía para el principiante, permite verificar el funcionamiento del instrumento.

Medida de una tensión continua

La medida con el osciloscopio de la tensión de una pila, fuente de tensión continua o divisor de tensión puede compararse con el valor obtenido utilizando un voltímetro confiable.

Esta simple determinación permite, además de comenzar a utilizar los controles del instrumento, asociar la lectura en pantalla con la sensibilidad seleccionada y posible atenuación de la punta, teniendo como referencia el valor medido con el voltímetro.

En el osciloscopio utilizado para estos ejemplos, la presentación se realiza dentro de un rectángulo con 8 divisiones de alto y 10 divisiones de ancho, correspondiendo 1cm de longitud a cada división.

La sensibilidad vertical puede modificarse desde 1mv/div hasta 5V/div dentro de $\pm 3\%$ en 12 pasos múltiplo de 1, 2 y 5.

De esta manera, el alcance máximo para cada canal será $\pm 20V$, extendiéndose hasta $\pm 200V$ cuando se utiliza una punta X10. El máximo valor de la tensión a la entrada de cada canal, excursión pico a pico más componente de continua no debe superar 50 V. El alcance mínimo es $\pm 4mV$.

La velocidad de barrido puede seleccionarse entre 1s/div y 0,5 $\mu s/div$ con una incertidumbre de $\pm 3\%$.

La selección se realiza por pasos, en total 20, múltiplos de 1, 2 y 5.

En fig.8.11 se ejemplifica la medida de una tensión continua, después de comprobar que el cero de potencial coincide con el centro de la pantalla. Como cada cuadrícula esta subdividida en 5 partes, a cada subdivisión le corresponde 0,2div. El trazo cruza el eje vertical en el espacio entre 2,2 y 2,4div. El operador deberá estimar la desviación de manera similar a la realizada en la lectura de la posición de la aguja en un voltímetro analógico.

En este caso, por cruzar el eje por debajo de la mitad de la subdivisión, se puede estimar que es del orden de 2,25 ±0,05 div.

Suponiendo que la sensibilidad para la que se realiza esta medida es 0,5V/div y se está utilizando una punta X1, el valor medido será:

$$. V_{med} = (2,25 \pm 0,05) \; div \; x \; 0,5 \; \frac{V}{div} = 1,125 \pm 0,025$$

Siendo el error de lectura:

$$e_L \% = \pm \frac{\Delta V_{med}}{V_{med}} x100\% = \pm 2,2\%$$

Teniendo en cuenta las especificaciones para la exactitud del selector de sensibilidad vertical, $\pm 3\%$ se puede concluir que la medida se realiza con un error de $\pm 5\%$, estando el valor real de la magnitud medida entre 1,07 y 1,18 V.

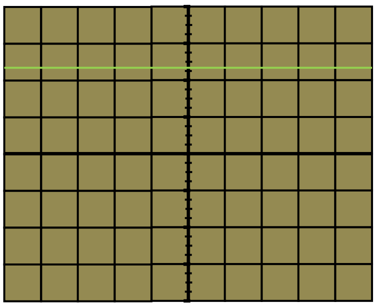


Fig.8.11

No debe sorprender la magnitud del error cometido puesto que se trata de un instrumento utilizado para verificar funcionamiento en el desarrollo y reparación de equipos, presentaciones en clase o clases de laboratorio. En este caso, utilizando la posibilidad brindada por el cursor se podría reducir el error, teniendo como límite inferior la especificación del fabricante. Mediciones que requieren mayor precisión imponen la utilización de instrumental de mayor costo.

Comprobación de la base de tiempo

Como en el caso anterior, y como parte de la práctica inicial de utilización del instrumento, se pueden contrastar las escalas más lentas de la base de tiempo con un cronómetro.

Para el osciloscopio utilizado en el modo automático y con la velocidad de barrido más baja, se realiza un barrido cada 10 segundos. Este tiempo es suficiente para ser contrastado con un cronómetro. Aumentando la velocidad de barrido, se pasa a 0,5 s/div, 0,2 s/div, 0,1 s/div. Para esta última se completa el barrido de la pantalla en un segundo. Cronometrando la duración de diez barridos consecutivos se podrá tener una idea de la exactitud de la base de tiempo aunque la medida dependerá del tiempo de retroceso del haz y forma en que se realiza el disparo.

Aunque el método anterior sirve como práctica inicial de uso del instrumento, no puede considerarse como verificación del funcionamiento de la base de tiempo. Para este fin, el osciloscopio provee como señal de calibración una onda cuadrada de 1V $\pm 3\%$ de amplitud, polaridad positiva y frecuencia de 1kHz $\pm 3\%$.

Esta señal se utiliza también para optimizar la respuesta en frecuencia del sistema de medida.

El circuito formado por la impedancia de entrada del osciloscopio y la punta de medida, permite optimizar el ingreso de la señal al osciloscopio ajustando un capacitor variable dispuesto en la punta de medida.

En fig.8.12 se esquematizan las visualizaciones al colocar la punta del osciloscopio en el terminal de calibración del mismo. Modificando el valor de la capacidad ajustable se pasa de sobre-compensado (fig.8.12a) a sub-compensado (fig.8.12c) pasando por fig.8.12b en el que la punta está compensada y la forma de onda visualizada coincide con la correspondiente a la señal de entrada.

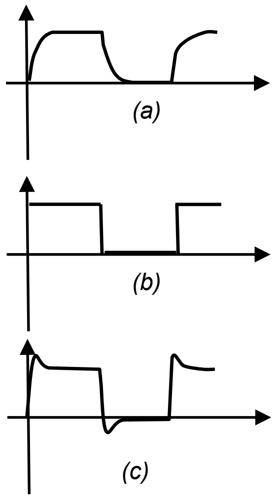


Fig.8.12

EJEMPLOS

Transitorio RC

En fig.8.13 se muestra un circuito que permite estudiar la carga y descarga del capacitor conectando la llave en la posición a o en b.

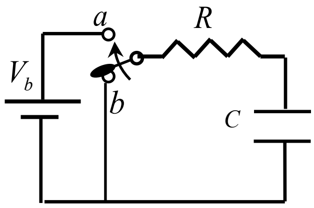


Fig.8.13

Conectando un voltímetro entre placas del capacitor se podrá seguir la variación de la diferencia de potencial entre las mismas mientras que, si se conecta entre los terminales de la resistencia, la diferencia de potencial indicada será proporcional a la corriente por el circuito.

Cuando la constante de tiempo del circuito es pequeña, menor que algunos segundos, se debe reemplazar el instrumento de medida por un osciloscopio o un sistema de adquisición más sofisticado.

Si la elección es un osciloscopio como el descripto en este capítulo, para obtener una señal estable en la pantalla debe repetirse el transitorio periódicamente. De esta manera, las diferentes presentaciones iniciadas en el mismo punto de la pantalla puedan ser retenidas por el ojo humano como una presentación única. Esto requiere conmutar rápida y periódicamente la llave. Como resultado, la diferencia de potencial en extremos del circuito bajo ensayo será similar a la esquematizada en la fig.8.12b.

Es posible lograr este tipo de excitación utilizando un generador electrónico de señales, el cual impulsa cargas por el circuito siguiendo una función determinada, generalmente seleccionable entre sinusoidal, triangular y rectangular, siendo esta última la utilizada en este caso.

En fig.8.14a se muestra la conexión de un canal para visualizar la tensión entre placas del capacitor.

Tanto la punta de medida del osciloscopio como el generador de señales poseen un terminal conectado a un punto común, de modo que si se tienen que utilizar ambos canales en el mismo circuito, se deberá considerar esta situación.

En fig.8.14b se muestra una posible disposición para visualizar la señal aplicada al circuito y la tensión sobre el resistor, proporcional a la corriente que circula por el mismo.

El conjunto de operaciones realizadas para conseguir una presentación aceptable para la realización de mediciones, mostrada en fig.8.15, se refieren al circuito de fig.8.14b.

Algunos generadores de señales tienen la opción de sumar un potencial constante a la forma de onda seleccionada, de modo que siempre es recomendable visualizar previamente la señal que se va a aplicar al circuito bajo ensayo.

Para ello se coloca la llave selectora de entrada para el canal elegido en la posición GND. Así, la diferencia de potencial aplicada es nula y la forma visualizada será una recta horizontal que, utilizando el control de posición o desplazamiento vertical, se hará coincidir con el eje elegido como potencial de tierra (centrado en la pantalla). En fig.8.15a se ajusta la línea de cero del canal 1 en el centro de la pantalla.

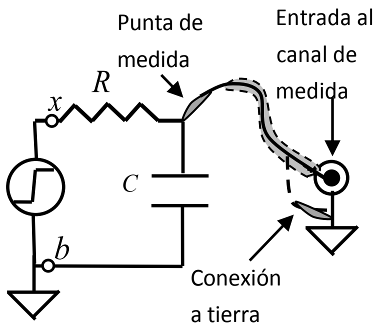
Conmutando la llave selectora de entrada a la posición AC y utilizando los controles correspondientes en el generador de funciones, se elige la frecuencia para la señal a visualizar. De ser necesario se ajustarán los controles del osciloscopio hasta obtener una imagen estable. En fig.8.15b la señal que entrega el generador es cuadrada de amplitud ± 1,5 V.

Conmutando la llave selectora de entrada a la posición DC podrá comprobar si la señal generada posee componente de continua. Si desea realizar la experiencia de acuerdo al esquema de fig.8.13 deberán ajustar los controles correspondientes del generador de señales hasta hacer coincidir el valor mínimo de la tensión aplicada con la línea de cero (GND) de la presentación. Con los controles del generador se suma una componente de continua a la señal hasta lograr que la base de la misma se encuentre al potencial elegido como cero (fig.8.15c).

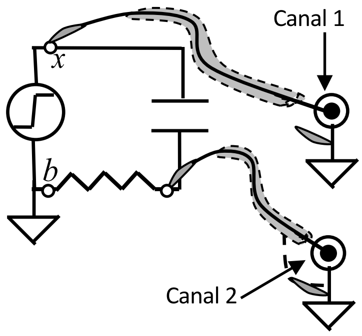
Para permitir mayor amplitud de la visualización, con el selector de entradas en GND y mediante la perilla de posición vertical, podrá desplazar hacia abajo la línea de cero hasta coincidir con una división, que será tomada como nivel de potencial cero (fig.8.15d).

Volviendo al acoplamiento DC para la entrada del canal 1, se observa la señal aplicada para la nueva línea de cero (fig.8.15e).

Esto permite aumentar la amplitud de la presentación ya sea man-

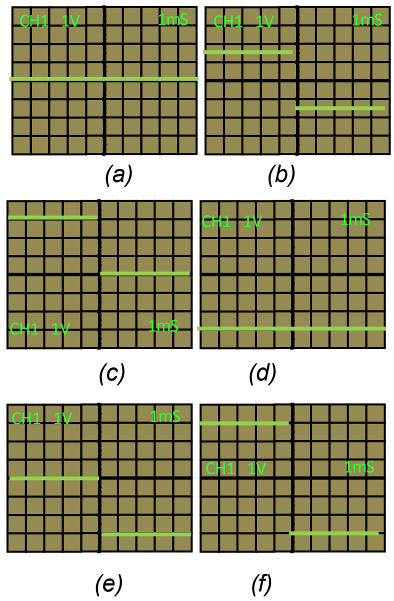


(a)



(b)

Fig.8.14



(a) (b)
(c) (d)
(e) (f)

fig.8.15

teniendo la amplitud del generador y aumentando la sensibilidad del canal o aumentando la amplitud del oscilador sin modificar la ganancia del amplificador de entrada al canal 1. En fig.8.15f se observa que se optó por la segunda posibilidad.

Conmutando el selector de canal a la posición canal 2 y ajustando el cero de este canal en el centro de la pantalla (fig.8.16a), se observa que antes de finalizar el transitorio de carga se produce la conmutación a descarga invirtiéndose la corriente la cual tiene un valor inicial igual al inicial de la corriente en carga, aunque de signo contrario (fig.8.16b).

Suponiendo que se desea estudiar el transitorio de carga del capacitor, siguiendo el mismo procedimiento que para el canal 1, se lleva la línea de cero hacia abajo (figs.8.16.c y d) y finalmente se ajusta el selector de base de tiempo para tener una presentación satisfactoria de la corriente de carga (fig.8.16.e).

Se debe recordar que la presentación en pantalla del osciloscopio es proporcional a la diferencia de potencial entre los terminales de entrada. En este caso, por ser la señal aplicada al canal2 la caída de tensión en una resistencia, el valor presentado será proporcional a la corriente por el circuito.

La constante de tiempo de carga se puede determinar a partir de la intersección entre la tangente a la curva en el origen y el valor de estado permanente que, correspondería a la línea de 0V si no se produjese antes la conmutación de la señal de entrada.

En fig.8.16.f se muestra que en este caso la intersección de ambas rectas corresponde a aproximadamente 7 divisiones.

En fig.8.17 se muestra una foto de la pantalla del osciloscopio correspondiente a fig.8.16.f. Sobre la misma se trazó la línea de cero y la tangente al origen en la curva de corriente, pudiéndose observar que cualquiera de las líneas trazadas podría corresponder a la tangente a la curva en su origen. Así, mediante este método resulta una constante de tiempo de 3,5 ms con un error de lectura del orden de ±3%.

Otra manera de determinar la constante de tiempo en la descarga se realiza considerando que es el tiempo para el que la corriente llega al 37% del valor inicial. En fig.8.17 se observa que inicialmente la corriente esta apartada aproximadamente 4,7 divisiones de la línea de cero, siendo 1,7 divisiones el valor aproximado correspondiente al 37% y por el que se traza una paralela al eje de tiempos hasta cortar la curva.

En dicha figura se puede comprobar que el tiempo correspondiente es $7div \times 0{,}5ms/div = 3{,}5ms$ con una incertidumbre similar a la determinada anteriormente.

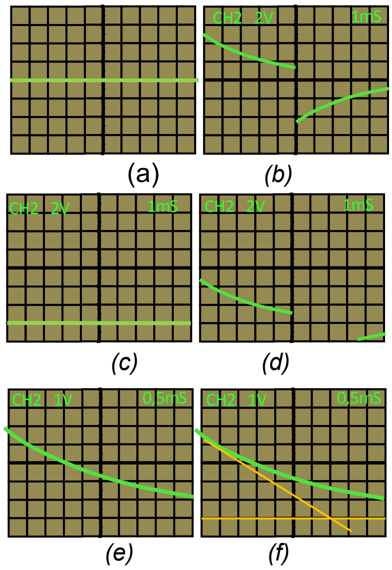


Fig.8.16

Para minimizar el error cometido, la señal a medir debe abarcar la mayor superficie de pantalla posible.

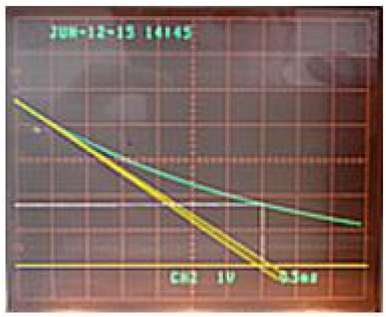


Fig.8.17

De esta manera se puede comprobar que ambos métodos conducen a un resultado similar, aunque en el segundo la determinación se realiza con mayor facilidad. Como se vio en los capítulos 5 y 6, el trazado de la tangente al origen sigue siendo de utilidad para dibujar las curvas a mano o comparar diferentes circuitos en base a su respuesta al escalón.

Para verificar estos resultados, los valores de resistencia y capacidad utilizados fueron medidos con un puente de medida que utiliza una excitación sinusoidal de 1 KHz, siendo los valores medidos,

$$R = 3.342 \pm 2 \quad \Omega, \qquad C = 1,085 \pm 0,003 \quad \mu F$$

De estos valores resulta $\tau = 3,63 \pm 0,1 ms$ .Tomando a este como el valor más cercano al real, el error cometido en la determinación de la constante de tiempo resulta inferior a 4%.

En fig.8.16b se puede comprobar que la conmutación se produce antes de que alcance el estado estacionario o al menos después de transcurrido un tiempo equivalente a unas siete a diez constantes de tiempo, por este motivo se utilizó la línea de cero para indicar el valor final de la descarga.

Cuando se experimenta con un fenómeno que decae lentamente de manera exponencial, no siempre se conoce el valor correspondiente al estado estacionario. Tomando algunos valores de la corriente en función del tiempo puede comprobarse si la variación es exponencial y, en caso de serlo, determinar la constante de tiempo. En el caso de la descarga del capacitor, de ecs.6.18 se tiene:

$$\ln\left(\frac{i(t_0)}{i(t)}\right) = \frac{(t - t_0)}{\tau}$$

En tabla 8.2 se indican algunos valores obtenidos utilizando el cursor del osciloscopio. Si no se dispone de esta opción se pueden leer los valores directamente sobre la pantalla. Como en el cálculo de la constante de tiempo interviene la relación entre cada valor de potencial con el inicial, es suficiente con tomar nota del numero de divisiones en el eje vertical correspondientes a la intersección de la gráfica con la cuadricula (Tabla 8.3). De tabla 8.2, resulta:

$$\tau = \frac{(1,5 - 0,5)}{\ln(4,1/3,1)} = 3,57 ms$$

Siendo en este caso la diferencia con el valor obtenido con el puente de medida, menor a 2%. Los valores de tabla 8.3 corresponden a la cantidad de divisiones entre la línea de cero y la intersección de las líneas verticales de la cuadrícula con la curva (fig.8.17).

t (ms)	V_R (V)	$\ln\left(\frac{V_R(t_0)}{V_R(t)}\right)$
0	4,78	– – –
0,5	4,1	0,153
1	3,52	0,306
1,5	3,1	0,433

Tabla 8.2

t (ms)	$\alpha(div)$	$\ln\left(\frac{V_R(t_0)}{V_R(t)}\right)$
0	4,7	– – –
0,5	4,0	0,161
1	3,5	0,295
1,5	3,0	0,449

Tabla 8.3

Debido al error cometido por el instrumento, cuando se utiliza para la determinación de la constante de tiempo de un circuito es suficiente con determinar el tiempo correspondiente al 63% del valor final en carga o 37% en la descarga.

Se puede mejorar la medida expandiendo la escala de tiempos y tomando nota de los primeros puntos, de manera similar a la última determinación realizada. De todos modos, en este caso el error instrumental de $\pm 3\%$ especificado por el fabricante del instrumento es el límite para las mediciones realizadas.

$$\tau = \frac{(1,5-0,5)}{\ln(4/3)} = 3,47ms$$

Con un error por debajo de 5%.

Circuitos con corriente alterna

Conmutando el selector de funciones del generador de señales a la posición “sinusoidal”, la señal aplicada al circuito bajo ensayo será una sinusoide a la que se le puede seleccionar amplitud y frecuencia.

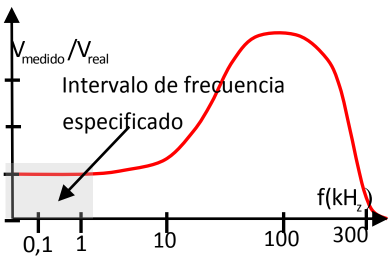
La realización del diagrama fasorial permite determinar, a partir de la medición de las tensiones sobre cada componente, el valor de resistencias y reactancias del mismo, pudiendo calcularse además, el factor de potencia y potencia disipada en el circuito. Con un multímetro digital en el modo de medida de “tensión alterna”, se puede obtener información útil del circuito. Considerando además que algunos multímetros de taller permiten medir la frecuencia de la señal aplicada, parecería innecesaria la utilización de un osciloscopio para estas determinaciones.

Este razonamiento es válido para señales armónicas, si la frecuencia esta dentro del intervalo especificado por el fabricante para el instrumento a utilizar, indicado en el manual del mismo.

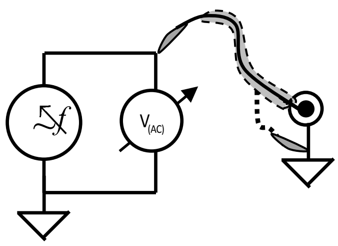
A veces, debido a que el instrumento entrega una buena indicación a la frecuencia de medida y desconociendo su respuesta en frecuencia, erróneamente se toman como válidas las medidas realizadas con el mismo. En fig.8.18a se representa la respuesta en frecuencia de un multimetro de taller midiendo el valor eficaz de la señal entregada por un oscilador sinusoidal para diferentes frecuencias. En paralelo con el voltímetro se conectó la punta de medida del osciloscopio utilizado para verificar la constancia de la señal sinusoidal entregada por el oscilador y medir la frecuencia de la señal en cada caso (fig.8.18b). En las especificaciones del instrumento se indica el intervalo de frecuencias para alterna entre 40 y 400Hz.

Con el osciloscopio, la representación de la señal en función de tiempo permite determinar, cuando se trata de una variación sinusoidal, la amplitud, período y diferencia de fase.

En fig.8.19 se muestra una serie de pantallas en las que se realizan estas determinaciones. En el canal 1 se representa la señal aplicada por el oscilador a una impedancia, en serie con una resistencia de 81,3 Ω. En el canal 2 se representa la caída de potencial en dicha resistencia, utilizada para determinar la corriente por el circuito.



(a)



(b)

Fig.8.18

En fig.8.19a la señal de mayor amplitud, desplazada hacia el origen de tiempos es la correspondiente al canal 1. En la parte inferior se indica el factor por el que se tiene que multiplicar la lectura en pantalla, en este caso CH1=2V/div para el canal 1, CH2=1V/div para el canal 2 y 5 μs/div para la base de tiempos.

En la parte superior se indica la diferencia de potencial entre las líneas de trazos ubicadas mediante el ajuste del cursor hasta coincidir con los valores pico de la sinusoide correspondiente a la tensión de entrada, siendo el valor indicado en la parte superior $\Delta V1 = 9{,}58\ V$.

Aunque se utilizó el cursor para realizar las mediciones, la medida puede realizarse igualmente multiplicando el número de divisiones por el factor de escala.

De la fig.8.19a la amplitud de tensión aplicada es:

$$V_g = \frac{9{,}58}{2} = 4{,}79 \qquad (V)$$

La determinación para el canal 2, fig.8.19b, junto con el valor de la resistencia serie permite calcular la amplitud de corriente por el circuito.

$$V_R = \frac{4{,}26}{2} = 2{,}13 \qquad (V)$$

$$I = \frac{2{,}13}{81{,}3} = 26{,}2 \qquad (mA)$$

La posición del cursor en fig.8.19c permite determinar el periodo de la señal y con este su frecuencia:

$$T = 38{,}85\ \mu s \rightarrow f = 25{,}74\ kH_z$$

En fig.8.19d se mide el intervalo de tiempo entre ambas señales. Debido a que la tensión aplicada al circuito (canal1) adelanta a la corriente (canal 2), la impedancia del mismo resulta inductiva.

Si se desea realizar el equivalente serie de la misma, el ángulo será positivo, corriente detrás de la tensión.

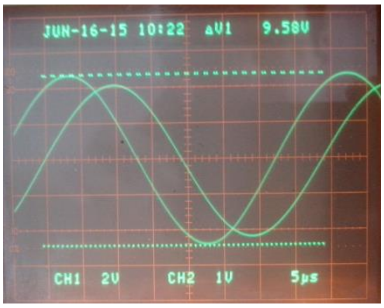
$$\Delta T = 6{,}70\ \mu s \rightarrow$$

$$\varphi = \frac{6{,}70}{38{,}85} x360^{\circ}$$

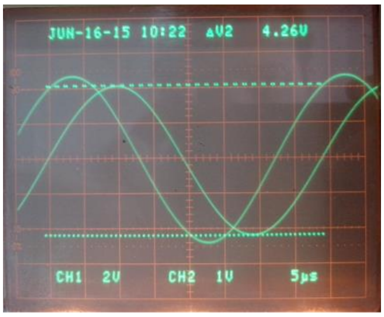
$$\varphi = 62^{\circ}$$

El módulo de la impedancia que el circuito presenta a la fuente de tensión resulta:

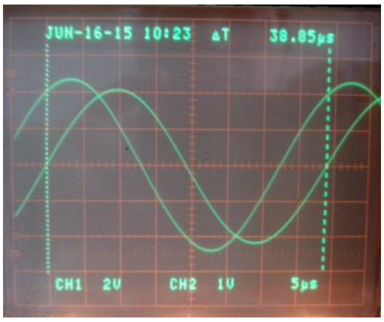
$$|Z| = \frac{V_g}{I} = 182{,}82\ \Omega$$



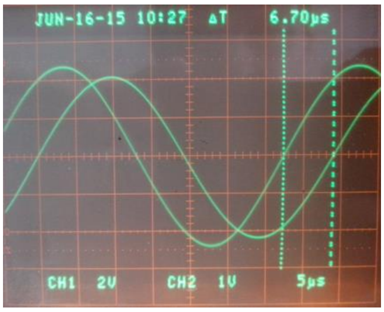
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.8.19

Para el equivalente serie del inductor se tiene que descontar la resistencia utilizada para determinar la corriente.

$$r = 182,82 - 81,3 = 21,46\ \Omega$$

Esta resistencia, además del cableado del inductor, incluye la correspondiente a las pérdidas en el núcleo a esta frecuencia.

La reactancia inductiva es:

$$X_L = |Z| sen\ (\varphi) = 151,2\ \Omega$$

Siendo la inductancia

$$L = \frac{X_L}{2\pi} T = 0,93\ mH_y$$

Otra manera de determinar la diferencia de fase entre dos señales sinusoidales se obtiene representando una señal en función de la otra.



(a)

Sean V(x) y V(y) las señales aplicadas a las entradas de los canales 1 y 2 con la llave selectora de modo en la posición “presentación x-y”,

$$V(x) = Asen(\omega t)$$

$$V(y) = Bsen(\omega t + \varphi)$$



(b)

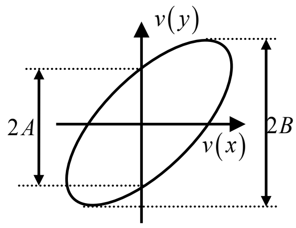
La figura presentada en pantalla será una elipse como la mostrada en fig.8.20.

$$t = 0 \begin{cases} V(x) = 0 \\ V(y) = Bsen(\varphi) \end{cases}$$

Para $V(x) = 0$ resulta $V(y) = A$

Reemplazando en la anterior resulta:

$$sen(\varphi) = \frac{A}{B} \qquad \textit{ecs.8.1}$$



(c)

Fig.8.20

De figs.8.20.a y 8.20.b se obtiene:

$$2B = 9,42$$

$$2A = 7,90$$

Se omitió colocar las dimensiones, que pueden ser voltios como en este caso, o divisiones que se cancelan al relacionarlas quedando:

$$sen(\varphi) = \frac{7,90}{9,42} = 0,838 \rightarrow$$

$$\varphi = 57^{\circ}$$

Con una discrepancia del orden del 8% con el valor obtenido anteriormente.

Para determinar cuál de las dos determinaciones es más próxima al valor real se debe recurrir al cálculo de errores cometidos.

Considerando la medida de fase a partir de la medida de la diferencia de tiempos, la expresión utilizada se obtuvo por simple proporcionalidad:

$$\varphi = \frac{\Delta T}{T} x360^{\circ}$$

Para calcular el error relativo se tiene que relacionar el diferencial de la función respecto de la variable con la función. Cuando se trata de productos y/o cocientes, como en este caso, se facilita tomando logaritmo natural y derivando.

$$\ln(\varphi) = \ln(\Delta T) + \ln(360^{\circ}) - \ln(T)$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta(\Delta T)}{\Delta T} + \frac{\Delta T}{T}$$

Donde se supone la peor condición para el error cometido.

En el peor de los casos, cuando en vez de utilizar el cursor se determinan las divisiones de la escala para la medida del intervalo de tiempo, a cada división le corresponden $5\mu s$.

Para una indeterminación de $0,1 div$ en la medida, resulta una incertidumbre en el conocimiento del intervalo de tiempo de $0,5\mu s$.

$$e\%_{\varphi} = e\%_{\Delta t} + e\%_{T} = \pm\left(\frac{0,5}{6,70}x100 + \frac{0,5}{38,85}x100\right) = \pm\ 9\%$$

$$\therefore\quad 56^{o} < \varphi < 68^{o}$$

Siendo el primer término el que produce la mayor contribución al error, la expansión de la escala para la medida del intervalo correspondiente a la diferencia de fase produce una disminución del mismo.

En fig.8.21 se muestran las diferentes presentaciones a medida que se expanden las escalas vertical y horizontal.

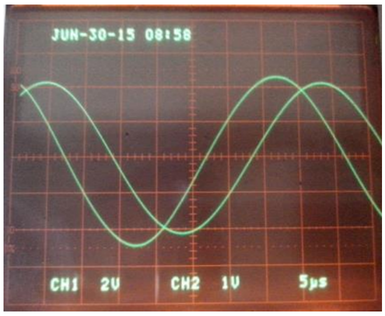
Utilizando la presentación de fig.8.21.d para obtener la diferencia de tiempo entre ambas, se puede observar que el valor obtenido coincide con el utilizado anteriormente mediante la utilidad cursor (fig.8.19d).

$$e\%_{\varphi} = e\%_{\Delta t} + e\%_{T} = \pm\left(\frac{0,1 div}{6,6 div}x100 + \frac{0,5}{38,85}x100\right) = \pm\ 3\%$$

Agregando el error cometido por el sistema de selección de escalas y amplificación especificado por el fabricante, en este caso $\pm 3\%$, el error cometido es del orden de $\pm 6\%$, resultando, la diferencia de fase:

$$57^{o} < \varphi < 65^{o}$$

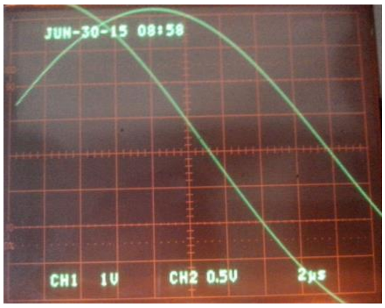
Si en cambio se decide utilizar la última representación (figuras de Lissajous), diferenciando ecs.8.1:



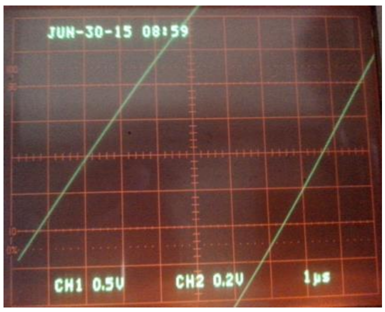
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.8.21

$$\cos(\varphi)\Delta\varphi = \frac{B\Delta A - A\Delta B}{B^2}$$

$$\frac{\cos(\varphi)\Delta\varphi}{sen(\varphi)} = \frac{B\Delta A - A\Delta B}{B^2 \frac{A}{B}}$$

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta B}{B}\right) tg(\varphi)$$

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{\varphi}\right)\% = \pm\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)\left(\frac{tg(\varphi)}{\varphi}\right)\% \qquad \textit{ecs.8.2}$$

Donde se consideró que ambos errores se suman.

El valor obtenido $\varphi = 57^{\circ}$ corresponde a 0,9948 radianes y la tangente es 1,5398, resultando:

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{\varphi}\right)\% = \pm\left(\frac{0{,}1}{3{,}95} + \frac{0{,}1}{4{,}71}\right)(1{,}55)\,\mathrm{x}\,100\%$$

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{\varphi}\right)\% = \pm 7{,}2\%$$

$$52^{\circ} < \varphi < 61^{\circ}$$

El agregado del error instrumental lleva este valor a $\pm 10\%$.

La ecs.8.2 permite comprobar que, cuando la diferencia de fase se aproxima a 90º, el método de las figuras de Lissajous no es adecuado para esta medición. Aunque la determinación de la diferencia de fase por el método de las figuras de Lissajous está bastante difundida, la ecs.8.2 permite comprobar que el error cometido aumenta a medida que la diferencia de fase se aproxima a 90º, siendo la medida de diferencia de tiempos la que permite determinar la diferencia de fase con menor error.

Circuito resonante

El circuito resonante mostrado en fig.8.22 o "circuito tanque", ampliamente utilizado en electrónica, además de servir como práctica para la utilización del osciloscopio será utilizado como ejemplo final del capítulo para una comprobación en clase de ciertos aspectos relacionados con la ley de Faraday.

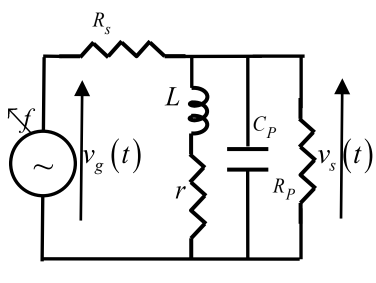


Fig.8.22

El circuito mostrado es el equivalente de un inductor en paralelo con una capacidad, conectado a un generador sinusoidal cuya frecuencia es ajustable en amplio rango.

El inductor se representa mediante su equivalente serie en el que L es la inductancia y r la resistencia serie originada por la resistencia del conductor. Para el ejemplo mostrado en que, debido al instrumental utilizado, la frecuencia máxima de trabajo estará por debajo de 100KHz, se considerará el valor de continua de esta resistencia.

La resistencia en paralelo, R_P está formada por la resistencia de entrada del instrumento de medida y cualquier otra resistencia que se coloque en paralelo. Si el núcleo del inductor es de material ferro-magnético esta resistencia tendrá en cuenta las pérdidas en el mismo. En el caso considerado por tratarse de un bobinado toroidal sobre un tubo de vidrio las únicas pérdidas son las ocasionadas por la resistencia del alambre. Finalmente, la resistencia en serie R_S, es utilizada para determinar la corriente entregada al circuito, proporcional a la tensión en dicha resistencia.

Como práctica de utilización del osciloscopio, se puede determinar experimentalmente la relación V_S / V_G en módulo y fase para diferentes frecuencias, a ambos lados de la resonancia.

Encontrar la relación entre estas expresiones y los componentes del circuito requiere la resolución del mismo. Aun trabajando en el plano complejo o mediante la transformada de Laplace, métodos no tratados en este libro, encontrar la relación entre tensión de salida y la de entrada o la expresión de la frecuencia de resonancia, no es una tarea sencilla. De todos modos, es posible encontrar algunos valores que sirvan para comparar los resultados obtenidos experimentalmente aprovechando la facilidad de resolución del diagrama fasorial de este circuito funcionando en resonancia.

En fig.8.23 se muestra el diagrama de fasores para la frecuencia de resonancia. La condición de resonancia impone que no exista desfasaje entre la corriente y la tensión de entrada. Como la diferencia entre la tensión de entrada y la de salida es la caída en la resistencia serie, la tensión de salida en resonancia también estará en fase con la tensión de entrada.

El diagrama comienza con la corriente por el inductor, siendo φ el ángulo de fase introducido por el mismo. La corriente en el capacitor adelanta 90º a la tensión en el inductor y su magnitud debe ser tal que en resonancia la corriente resultante de estos componentes se encuentre en fase con la tensión de salida. Sumándole la corriente a través de la resistencia paralelo se obtiene la corriente entregada por el generador. Por estar en fase, la tensión entregada por el generador es la suma de la caía en la resistencia serie y la tensión de salida.

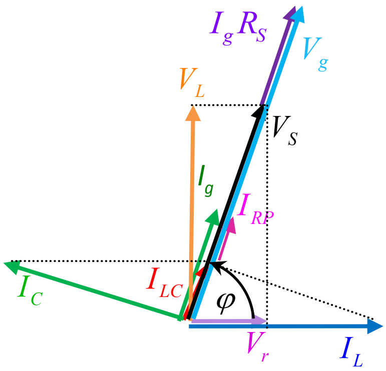


Fig.8.23

$$I_L sen(\varphi) = I_C = \frac{V_S}{X_C}$$

$$I_L \cos(\varphi) + \frac{V_S}{R_P} = I_g$$

$$\frac{V_S}{X_C tg(\varphi)} + \frac{V_S}{R_P} = I_g$$

$$\frac{V_S\, r}{X_C X_L} + \frac{V_S}{R_P} = I_g$$

$$V_g = I_g R_S + V_S$$

$$V_g = V_S \left(1 + \frac{R_S r\, C}{L} + \frac{R_S}{R_P}\right)$$

$$I_L sen(\varphi) = I_C$$

$$\frac{V_S}{\sqrt{r^2 + X_L^2}} \frac{X_L}{\sqrt{r^2 + X_L^2}} = \frac{V_S}{X_C}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{L}\right)^2$$

Las ecs.8.3 y 8.4 permiten encontrar los valores de comparación para los datos experimentales.

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{LC}\right) - \left(\frac{r}{L}\right)^2} \qquad \textit{ecs.8.3}$$

$$\frac{V_S(\omega_{res})}{V_G(\omega_{res})} = \frac{1}{\left(1 + R_S\left(\frac{1}{R_P} + \frac{rC}{L}\right)\right)} \qquad \textit{ecs.8.4}$$

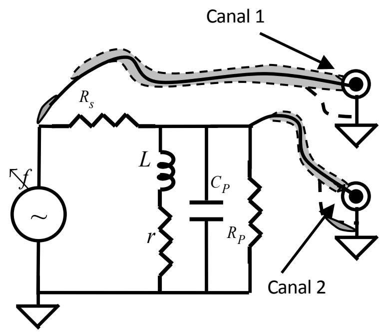


Fig.8.24

En fig.8.24 se muestra la conexión de los canales del osciloscopio.

Los componentes utilizados fueron medidos con un puente universal a la frecuencia de 5KHz, con error a plena escala inferior a $\pm 1\%$(Tabla 8.5).

En tabla 8.4 se indican algunos de los valores obtenidos experimentalmente para la disposición de fig.8.24. Estos valores se utilizaron para calcular la relación de transferencia y fase en función de la frecuencia cuya representación se muestra en fig.8.25.

$T(\mu s)$	$\Delta T(\mu s)$	$V_G(V)$	$V_S(V)$
176,6	-13,7	1,32	0,918
178,4	-12,5	1,346	0,96
182,0	-10,8	1,36	0,986
185,6	−8,7	1,396	1,028
189,6	−7,8	1,42	1,058
194,0	-6,4	1,438	1,086
197,2	-2,9	1,448	1,098
201,2	0	1,462	1,106
200,4	0	1,474	1,122
202,0	1,98	1,472	1,112
206,4	4,56	1,44	1,078
212,0	7,7	1,41	1,028
214,4	10,32	1,394	0,994
221,2	13,26	1,356	0,926

Tabla 8.4

De los datos obtenidos se puede observar que hay dos valores para los que no se detectó diferencia de fase y por tanto que corresponden a la condición de resonancia.

Tomando el promedio entre los valores para la frecuencia de resonancia obtenida experimentalmente y procediendo de la misma manera para la relación de transferencia en resonancia, resulta:

$$f_{res} = 4980H_z$$

$$\left.\frac{V_S}{V_G}\right|_{fres} = 0,758$$

De las expresiones con las que realizamos las comparaciones, ecs.8.3 y 8.4, utilizando los valores de tabla 8.5 resulta:

$$f_{res} = 4962H_z \qquad \left.\frac{V_S}{V_G}\right|_{fres} = 0,828$$

La discrepancia entre los resultados obtenidos es 0,4% para la frecuencia de resonancia y 9% para la relación de transferencia.

En la evaluación de ecs.8.4 se utilizó $R_P = 1M\Omega$ correspondiente a la resistencia que presenta el canal del osciloscopio con el que se está realizando la medida, debiéndose considerad además, la resistencia de pérdida en el capacitor. Otro factor a tener en cuenta es el aumento con la frecuencia de la resistencia del alambre utilizado para la bobina.

Este efecto, relacionado con la oposición a las variaciones de flujo magnético en el interior del alambre por el que está circulando la corriente, se conoce con el nombre de efecto pelicular.

Nada se dijo sobre R_S, que es un resistor de carbón depositado y cuyo valor, determinado para continua, es el que se utilizó en los cálculos.

Finalmente, si se espera minimizar la discrepancia entre los resultados obtenidos empleando métodos diferentes, antes de comenzar a medir se deberá prestar atención en el instrumental utilizado, siendo el primer paso a dar el contraste con instrumentos confiables y correspondiente calibración.

Para que el resultado obtenido se aproxime al valor real, deberán tenerse en cuenta aquellos efectos que pueden influir en el mismo. Esto requiere conocimiento y experiencia. En este sentido, estas prácticas tienen por finalidad facilitar las tareas para el principiante, cuyo esfuerzo y dedicación le permitirán adquirir la experiencia necesaria.

El último ejemplo muestra la aplicación del circuito resonante para una demostración relacionada con la ley de Faraday.

Como se trata en el capítulo 5, la f.e.m. inducida en una curva cerrada depende de la variación en el tiempo del flujo encerrado por la misma.

Eligiendo una curva suficientemente amplia, de modo que contenga totalmente al flujo variable, la f.e.m. inducida no dependerá la forma de dicha curva. Como este resultado es de utilidad cuando se quiere relacionar esta ley con los campos, es interesante realizar una comprobación experimental del mismo.

Una manera de implementar esta experiencia es utilizando un inductor por el que se hace circular una corriente periódica. Midiendo la f.e.m. inducida en un circuito cerrado que contiene al inductor, se podría comprobar si esta se modifica al cambiar la forma de dicho circuito.

El problema que surge es el tamaño que debe tener dicho circuito para contener todo el flujo magnético originado en el inductor. Utilizando un toroide con espiras una al lado de la otra muy juntas, es posible minimizar el campo magnético disperso cuando por el mismo circula una corriente eléctrica (fig.5.41).

En fig.8.26 se muestra un esquema del circuito que utiliza un toroide con núcleo de aire conectado a un oscilador sinusoidal de frecuencia variable para producir el flujo magnético variable en el tiempo, siguiendo la forma del toroide y confinado en su interior. El circuito que encierra totalmente a este flujo y cuya posición relativa al campo se modificará, está

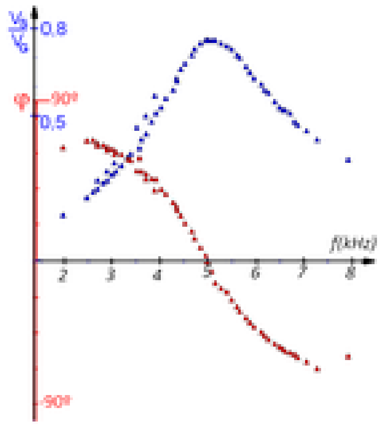


Fig.8.25

INDUCTOR	$L(mH_y)$	0,884
	$r\ (\Omega)$	1,9385
CAPACITOR	$C(\mu F)$	1,158
RESISTENCIA SERIE	$R_S\,(\Omega)$	81,53

Tabla 8.5

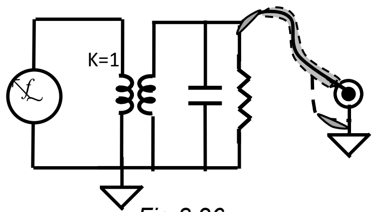


Fig.8.26



Fig.8.27

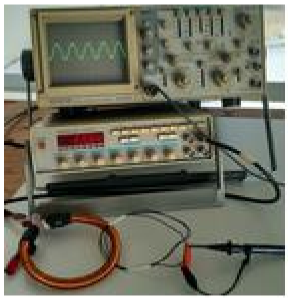
formado por tres vueltas de cable formando una espira de aproximadamente 10 cm de diámetro (fig.8.27). El circuito se cierra con una resistencia de 100 $K\Omega$ sobre la que se conectará la punta del osciloscopio para detectar la f.e.m. inducida.

Para maximizar la señal observada, en paralelo con la resistencia se conecta una capacidad de 0,22 μF ajustándose la frecuencia del oscilador hasta encontrar la resonancia. Dejando el estudio de la resonancia en circuitos acoplados para cursos avanzados de electrónica, se puede determinar experimentalmente la frecuencia de resonancia de este sistema.

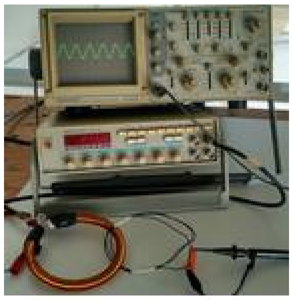
En fig.8.28 se muestra el resultado obtenido para dos frecuencias en torno a aquella en que por ser máxima la f.e.m. inducida, corresponde a la resonancia del circuito. En fig.8.28a la frecuencia es 238,2KHz, en fig.8.28b 276,8KHz mientras que en resonancia, fig.8.28c, 256,8KHz.

En fig.8.28d y e se puede comprobar que no se detectan cambios en la f.e.m. inducida para diferentes posiciones del secundario.

Finalmente se debe mencionar que la determinación de la respuesta en frecuencia realizada y la comparación con otros métodos de medida se realizaron con un fin didáctico. En la práctica, en base a la frecuencia de resonancia pretendida se calculan los valores necesarios de capacidad e inductancia determinándose los materiales para los mismos en función del ancho permitido para la curva de respuesta de acuerdo a la aplicación en que será utilizado.



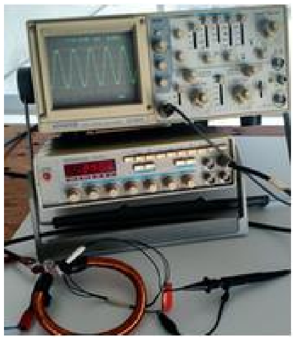
(a)



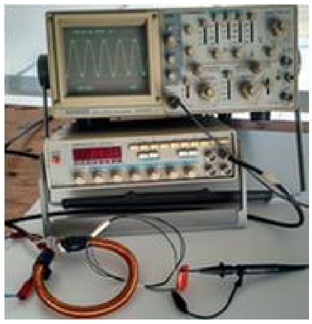
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig.8.28

Resultado de ejercicios de final de capítulo

Capítulo 1

1.1. Al conectar a tierra el objeto cargado positivamente, electrones suben desde tierra mientras que para el conductor cargado negativamente los electrones pasan a tierra.

1.2 atractiva

1.6 B se carga positivamente.

1.7 Atracción

1.9 37,5 N

1.11 El cilindro adquiere cada vez mayor cantidad de carga positiva hasta que se produce la ruptura dieléctrica del aire.

1.12 $1,4x10^{-10}\,m$

1.17d $5m$

1.18 $|E| = 14x10^{-10}\ V/m,\ P/F_e \approx 5x10^{-12}\%$

Capítulo 2

2.1 a) No depende de la trayectoria b) 243,3V c) A(-), B(+) d) $v = 5,5\ m/s$

2.2 V=2300 V, C=120 pF, carga positiva.

2.3 $V_1 > V_2,\ V_4 > V_3,$ No existe una referencia común a todos los puntos.

2.4 $V_1 - V_2 = 120V,\ V_1 - V_3 = 7V,\ V_1 - V_4 = -293V.\ V_2 - V_3 = -113V.$

$V_2 - V_4 = -413V,\ V_3 - V_4 = -300V.$

2.6 a) $0,8\mu F$ b) $1,6mC\ \ 400V$

c) $1,6mC$ d) 3,2J e) 1,6J (Ver comentario junto al enunciado)

2.8 $V_{AB_{máx}} = 518V$

2.9 $-2.300\ eV < 0$

2.10 a) 0V, 10V, NO. b) Iguales, $Q_A = +Q;\ Q_B = -Q$

2.11 a) $V_1 = 1000V,\ V_2 = 700V,\ V_{1-} - V_{2-} = -300V$

b) $V' = 745V$, $Q'_1 = 8{,}94nC$, $Q'_2 = 50{,}66nC$,

2.12 a) $V_{1-} - V_{2-} = -1700V$

b) $V' = -445V$, $Q_1^{'} = -5{,}34pC$ $Q_2^{'} = -30{,}26pC$

2.13 El mismo

2.14 La distribución de cargas sobre la superficie depende de su forma.

2.15 No. Se puede demostrar que no se acumulan cargas en el interior de la cavidad siguiendo un camino cerrado que contenga al conductor y la cavidad (fig.2.42b). Por ser el campo electrostático, el trabajo en el lazo es cero y teniendo en cuenta que el campo en el conductor es nulo, el campo en la cavidad necesariamente tendrá que ser nulo. Este tema se trata en la segunda parte del libro.

2.16 a) Cargas negativas se distribuyen sobre la superficie de acuerdo a la forma de ésta.

b) El potencial en el interior y sobre la superficie del conductor es el mismo debido a que el campo electrostático en el conductor es nulo y por lo tanto no se realiza trabajo para desplazar una carga de prueba en su interior.

2.17 a) –Q,+Q,0

2.18 a) –Q,0,-Q

2.19 Opción d

2.20 Opción c: $Q_A = -Q$, $Q_B = 0$ La opción a no corresponde a $V(\infty) = 0$.

2.22 a) 5nC b) $V_A^{'} = \dfrac{V_A}{1 + \dfrac{CC_B}{C_A(C + C_B)}}$

2.23 $C_{AB} = 10pF$, 7nC. Esfera A, -7nC uniformemente sobre la superficie. Esfera B: +7nC uniformemente sobre la superficie interna.

2.24 a) Las cargas de A y las internas de B permanecen en su posición. En la superficie externa de B se inducen cargas positivas en el lado más próximo a C e igual cantidad de carga negativa en el más alejado.

b) La diferencia de potencial entre A y B no se modifica (700V). Se modifica el potencial de A, B y C. El potencial de B disminuye porque se acerca C. Como la diferencia de potencial entre A y B no se modifica, el potencial de A también disminuye.

c) Desde el exterior, la esfera hueca tiene carga nula y capacidad $C_B = 10pF$. La esfera C, a -1KV tiene capacidad $C_C = 6{,}6pF$. Acercándolas hasta que lleguen a tocarse, la carga se reparte entre ambas superficies las que adquieren -394V respecto a una referencia en infinito. El potencial de A será -1094V.

2.25 $Q_A = 3{,}3nC$, Q_C=-3,3nC, $Q_B = 2{,}2nC$, Q_D=-2,2nC.

$V_A = V_B = 100V$, $V_C = V_D = 0V$

2.26 $Q_A = Q_D = 1{,}32nC$, $Q_C = Q_B = -1{,}32nC$

$V_A = 100V$, $V_B = 0V$, $V_C = V_D = 60V$

2.27 a) Negativas. b) $v = \sqrt{\frac{2|q|}{m} V_a}$

b) $1{,}33x10^7$; $1{,}87x10^7$; $5{,}93x10^7\, m/s$

2.28 a) 3eV, 2eV, 1,2eV. NO

b) 97eV, 98 eV, 98,8 eV. Si

c) Modificando el potencial de reja se controla la cantidad de electrones que llegan a la placa.

2.29 3%, 4,3%, 4,5%, -2,2%

2.30 0,74nF

2.31 3,84

2.32 a) $0{,}1\mu C$, $25\mu J$

b) $33{,}3\ nC$, $8{,}33\mu J$

c) $-16{,}66\ \mu J$ La fuente tuvo que quitar cargas al capacitor.

2.33 $F = \frac{25d}{x^2}$ (μN) con dirección y sentido del desplazamiento.

d: Separación inicial de las placas.

$W_{mec} = +16{,}66\ \mu J$

2.34 a) 1,2 V; b) 11,88 V

c) $Q1 = Q3 = 1{,}452\mu C$, $Q2 = 1{,}1616\mu C$, $Qx = 1{,}7424\mu C$

2.35 a) $V_1 = 100\ V$, $V_2 = 200\ V$, $V_3 = 0\ V$

b) $V_1 = 14{,}28\ V$, $V_2 = 28{,}57\ V$, $V_3 = 42{,}85\ V$

c) $V_1 = 33{,}33\ V$, $V_2 = 0\ V$, $V_3 = 33{,}33\ V$

Capítulo 3

3.1 a) $4,99\ mA$ b) $18,45\ mA$ c) $3,33\ A$

3.2 $1\ K\Omega\ \ 1/4W\quad P_{dis}/P_{especificada}\% = 10\%$

$270\ \Omega\ \ 1/4W\quad P_{dis}/P_{especificada}\% = 37\%$

$0,5\ \Omega\ \ P_{dis} = 5,6\ W$ Un resistor de 10 W estaría al 56% del valor especificado.

3.3 4,99 V, 4,98 V, 1,67 V.

3.4 1,28V, No, 1,22V

3.5 4,99V 4,96V 1,06V

3.6 Utilizando la fuente de 2V se disipa 0,55W. Para las otras opciones la corriente supera la especificada.

3.7 a) 13.500C b) 162kJ

3.8 a) 239361 capacitores b) 81kJ

3.10 4,85V, 1,617Ω

3.11 a) 73,33 mA b) 156,8 mA; 1,90 V

3.12 a) $150V$: $P_{entregada}$ =170,4 W

$50V P_{recibida}$ = 56,75W $P_{disipada}$: (58,1+12,91+42.61)W

$P_{recibida} + P_{disipada} = 170,4W$

b) 168,64 V

c) 371 μC. Una vez que se estabilizan las cargas las corrientes vuelven a tomar el valor correspondiente al inciso a.

3.13 a) Las corrientes son las mismas. $V_A - V_B$ =114,83 V

b) 252,6 μC, 114,83V; 53,75 V.

3.14 a) Las corrientes son las mismas. $V_A - V_B$ =105,6V

b) C 4,7μF: 296,38 μC placa superior +

C 2,2 μF: 232,23 μC placa superior +

C 0,47μF: 64,15 μC placa derecha +

3.15 54 μC placa derecha +

3.16 a) 1146

b) 1463

3.17 $I_1 = 32,6$ $I_2 = 10,3$ $I_3 = 22,3$ $I_4 = 7,0$ mA

3.18 a) $I_2 = I_3 = 19,1$ $I_4 = 10,9$ mA

b) En R_2 y R_4 se supera el 20% especificado.

c) 16,2 mA

3.19 a) 6,15 V Posibles fuentes: 10 12 y 15 V

b) Con la fuente de 10V y el potenciómetro de 300 Ω la potencia disipada es 0,7W

c) Medida de corriente: Instrumento analógico. Alcance: 30mA

Medida de tensiones: Instrumento digital. Tensión en R_2 y R_4,alcance20V
Tensión en R_3, alcance2V

3.20 $\Delta I_{instrumento}$=±0,3mA ΔIl_{ectura}=±0,05mA e%=2%

El valor real de la corriente se encuentra dentro del intervalo 17,4 y 18,1mA.

3.21 e_R%=1,28% e_V%=0,75% e_I%=2%

El valor real de la corriente se encuentra dentro del intervalo 17,5 y 18,3mA.

3.22 b) 1,5mA: R=68,96Ω +0,06% 3mA: R=33,89Ω +0,3% 15mA: R=6,68Ω +5%
30mA: R=3,34Ω -11%

c) 1,5mA: $-$0,05% 3mA: $-$0,3% 15mA: $-4,4$% (-5%) 30mA: +11,3% (+11%)

d) 1,5mA: R=66,7Ω 3mA: R=33,43Ω 15mA: R=6,97Ω 30mA: R=2,99Ω

3.23 b) 1 V: R=18kΩ $\pm$1% 2 V: R=39kΩ +2,6%$\pm$1% 10 V: R=180kΩ -10%$\pm$1%
20 V: R=390kΩ -2%$\pm$1%

c) 1 V: $\pm$1% 2 V: -20μV +2% (descontar el error sistemático de +20μV)

10 V: +0,9V $\pm$2% 20 V: +0,4V $\pm$2% (en estas dos se debe sumar 0,9V o 0,4V al valor obtenido para que el error que cometa a fondo de escala el instrumento construido sea ±2%)

d) 1 V: R=20kΩ 2 V: R=41kΩ 10 V: R=182kΩ 20 V: R=392kΩ

3.24 a) V_{C1}=7,06V, V_{C2}=4,94V

b) V_{C1}=10,95V, V_{C2}=1,05V

3.26 α=0,0043 ºC^{-1}, -450mV

3.27 11°C…33°C

3.28 a) 100µA b) 1ms

3.29 Rf1 $\simeq 108 M\Omega$, Rf2 $\simeq 90 M\Omega$

Capítulo 4

4.1 20A

4.2 a) 285 μT b) 0 c) 6,28 μT.m

4.3 b) 33,7°

4.4 a) -36 ($\breve{i}$) -12 ($\breve{j}$) 0 ($\breve{i}$) 12 ($\breve{j}$) mN

b) $W_{externo}$=0,9 mJ

c) El campo magnético encerrado por la espira es menor que el inicial.

4.6 Vea los temas del capítulo 5 y vuelva a tratar este tema. Podrá comprender que no existe contradicción con el principio de conservación de la energía a pesar del resultado de 4.4b) y la disminución de la energía en el campo magnético porque falta considerar la f.e.m. inducida en la espira que “facilita” el trabajo que debe realizar la fuente que impone la corriente de 2 A en la espira. Algo parecido ocurre con 4.5.

4.7 La espira se aleja del alambre. En la posición considerada la fuerza es de 4,286 μN ($\breve{i}$)

4.8 a)

B_{plana}(0)=0,628 mT B_{plana}(0,5)=0,7155B_{plana}(0)

$B_{Helmholtz}$(0)=0,899mT $B_{Helmholtz}$(x)=0,946$B_{Helmholtz}$(0)

b) $\left.\frac{\Delta B}{B(0)}100\%\right|_{plana} = -28,5\%$ $\left.\frac{\Delta B}{B(0)}100\%\right|_{Helholtz} = -5,4\%$

c) La segunda disposición permite mayor uniformidad del campo. Aunque se duplica el número de espiras, la intensidad en el centro es 1,43 veces mayor.

4.9 a) 0,998 $B_{toroide}$ b) 0,499 $B_{toroide}$

4.10 a) 18,6 mm b) 56,4 μAm^2

4.11 a) 0 b) 1,56x10^{-3} Nm, anti horario alrededor del eje z.

4.12 a) 5 mH_y b) 13,5 mW_b c) 50 mW_b

4.13 a) 0,68 b) 172 mW_b c) 34,4A

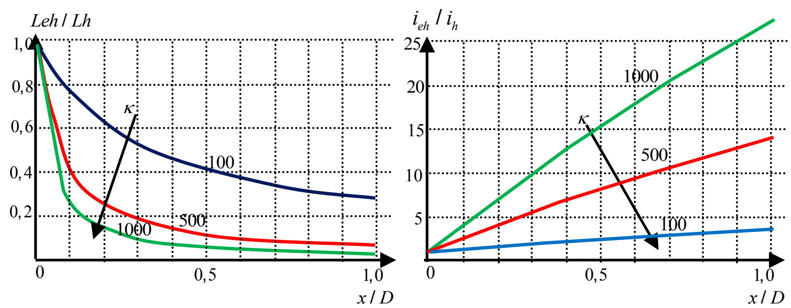
4.14 a) 0,41 mH_y b) 0,41 cos(θ) mH_y

4.16 a) 628esp b) 157,8 A-esp c) 631,1 μT

d) 495,6 μH_y R= 5,3Ω (Se tomó ρ=17nΩ.m)

4.17 49,5 mH_y

4.20-4.22



4.23 a) 260 μN/rad b) R= 10,6Ω (Se tomó ρ=17nΩ.m)

4.24 a) Se adopta el alambre del segundo rollo debido a que cuando circulan 0,1 A por el mismo, la densidad de corriente es aproximadamente igual a la estimada segura.

b) 128 espiras c) 16,08m R= 5,6Ω (Se tomó ρ=17nΩ.m) e=3,2cm. NO. d) 0,56V 56mW.

4.25 0,314mT -30%

4.26 b) 4,9 Ω 2,4 Ω 1,15 Ω 0,525 Ω

4.27 a) 10,47A b) 1,047V

4.28 a) 9,36A b) NO

c) Se puede cerrar por separado las llaves para 1 A (0,97A) o para 2A (1,9A). Cerrando ambas (1A+2A) , circula 2,69A que es admisible aunque supera la especificación. Se utilizó para la resistividad del cobre ρ_{Cu}=17nΩ.m .

La tensión sobre Rs será 97mV , 190 mV o 269 mV de acuerdo a las llaves cerradas. El factor para la medida de la corriente a partir de la indicación de un voltímetro en paralelo con la misma es 1V/10A. Para unir la bobina con al fuente se consideraron dos cables de 2m cada uno.

4.29 a) 8,14 A b) NO

c) L_1 cerrada: I= 0,97 A V_{med}= 97 mV

L_2 cerrada: I= 1,88 A V_{med}= 188 mV

L_1 y L_2 cerrada: I= 2,68 A V_{med}= 268 mV

L_3 cerrada: I= 3,56 A V_{med}= 356 mV

4.30 0,1198 i (mT)

4.31 a) 226,4 μT b) k_φ=33x10^{-3} Nm/s c) 48 μT

Capítulo 5

5.3 a) 106,8 t^2 μW_b (entrante) b) 213,6 μV (anti horario) c) 534 μV (horario)

5.5 a) 0,129 μV (anti horario) b) 0,461 μV (horario)

5.7 a) 106,8 t^2 μW_b (entrante) b) 0V c) NO d) 38,4nC

5.10 a) 0, 53mH_y b) 0,17 c) 1,48mV 3, 16mH_y

5.11 0,42 Ω 0,39 H_y

5.12 a) 97mA b) 178mA c) 8,39V

5.14 b) 3,6W 25 m/s 0,144N e) 3,5W 22,5 m/s 0,1296N 0,1584N

5.16 a) 28,26 sen(314 t) V b) R= 43,3Ω (Se tomó ρ=17nΩ.m)

c) $I_{máx}$ = 1,57 mA R_{min}= 17.956,7 Ω (R ≥ 18kΩ) d) 28,19 V

5.17 28,26 (sen(314 t) +cos(314 t)) V

5.18 Va-Vb = 29 sen(314 t) V

5.21 a) 56V b) 29V c) -58V

5.22 b) 62,53 mH_y c) 0,61 cos(314 t) A d) 1,09 T

5.23 a) 1,65 mH_y b) 23,16 A, 0,109mW_b c) 1,092 T

5.24 a) 1,887mW_b b) 1,887 $e^{-24,24x10^3 t}$ mW_b c) 33,39 $e^{-24,24x10^3 t}$ mA 1,377μC ç

5.25 a) 599,2 V b) 299,7 V

5.26 $\omega BR\ell$ sen(ω t) entrante

Capítulo 6

6.1 a) 5; 25 μs b) $i_C(0^+)$=12A $Q(\infty)$= 60μC c) $i_C(0^+)$= -2,4 A $Q(\infty)$= 0

6.2 a) 5; 0,2 μs b) $i_L(0^+)$=0 $e_L(0^+)$=12 V (anti horario) $i_L(\infty)$=0,12A $e_L(\infty)$=0

c) $i_L(0^+)$=60 mA $e_L(0^+)$=3120 V (horario) $i_L(\infty)$=0 $e_L(\infty)$=0

6.7 $R_{fuga} \simeq 84M\Omega$

6.8 b) 7 min

6.9 a) 2A b) q_1=q_2=20/3 μC q_3=0 i=1/3 A c) 20 μs

6.10 a) 10 A 25 J b) 24,992 J c) T=9,64 ms τ=27,8 ms $\tau/T \approx$ 3ciclos

6.11 a) $q_1(t) = = \frac{Q_0}{2}(1+\cos(\omega_1 t)$ b) $f_1 = \frac{2}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$ c) NO

6.12 a) $q_1(t) = = \frac{Q_0}{3}(1-\cos(\omega_2 t)$ b) $f_2 = \sqrt{3}\ f_1$

6.13 a) 0,314 A (de A hacia B) b) 2,28 V (de A hacia B) c) 0,04 A (de A hacia B)

6.14 a) 4,2 ms b) 3 ms

Capítulo 7

7.1 a) 0,987 μF b) 0,660 μF

7.2 55,86 Ω, 715,4 mHy

7.3 a) 0,15 sen(1400 t+0,279) A b) 3,32 sen(1400 t -1,29) V

7.4 a) 20,6 mA b) 0,55 μF

7.5 a) 350 μs, 2857 Hz, 24Ω, 38,6º (capacitivo) 2,34 W b) 18,75 Ω 3,72μF

7.6 b) 30,71 Ω 1,45 μF

7.8 a) 232 μs, 4,31 kHz, b) 3,96 V 141,4 mA c) 28Ω, 40,3º (inductivo) d) 11,35 Ω 0,67mHy

7.10 173,6 W

7.12 a) 6,5A b) 33,88 Ω 23,72 Ω 77mHy c) 131,65 μF V_{motor}=314 V I_{motor}=9,27 A

d) C_P < 67 μF V_{motor}=220 V I_{motor}=6,5 A

7.14 a) $Bl v_0$ b) $Bl v/R$ $F_{magnética} = (Bl)^2 v_0/R$ c) siguiendo al campo magnético.

7.15 a) $Bl\,(v_0 - v)$ $\quad i(t) = \frac{Bl}{R}(v_0 - v)$ $\quad F_{magnética} = \frac{(Bl)^2}{R}(v_0 - v)$

b) $v(\infty) = v_0 - \frac{F_{roz} R}{(B\ell)^2}$ $\quad$ d) $R\,m/(B\ell)^2$

7.16 b) $\left((B\,l\,v_0)^2/4R\right)$

7.17 b) $\left((AB)^2\omega/R\right)\,\text{sen}^2((\omega_0-\omega)t)$ Expresión del par en el eje de un motor asincrónico.

Bibliografía

Bujovtsev, V.Krivchenkov, G. Miakishev, I. Saraeva (1979) Problemas seleccionado de Física Elemental. Editorial MIR.

Crawford F Jr (1979) Ondas. Editorial Reverté.

Eisberg Lerner (1988) Física: Fundamentos y Aplicaciones Vol II Mc. Graw Hill.

Fernández Gallon (1941) Física Elemental. Kapeluz

Feynman R. The Feynman Lectures on Physics Volume 2

Hammond P. (1985) Electromagnetismo Aplicado.

Kip A. (1968) Fundamentos de Electricidad y Magnetismo A. Mc. Graw Hill

Loyarte R. (1946) Física General Tomo IV Facultad de Cs.Fisicomatemáticas UNLP

Treman F. (1952) Ingeniería Electrónica y de Radio Mc. Graw Hill- Arbó

Terrel Croft (1940) Tratado de Electricidad Práctica. Mc. Graw Hill

Wedlock. Roberge Electronic Components and Measurements. MIT-Prentice-Hall

El autor

Alberto Nazareno Isidori

Recibido de Ingeniero en Telecomunicaciones 1978 en la Facultad de Ingeniería de la UNLP, ingresó a la carrera del Personal de Apoyo a la Investigación (CONICET) en 1977 trabajando en la División Electrónica de INIFTA en desarrollo, mantenimiento y reparación de equipos electrónicos utilizados en Investigación. Accedió al cargo de Profesional Principal en 1989. A partir de 1999 formó parte del Área Informática de dicha institución. Ingresó a la carrera docente en 1981 desempeñándose desde entonces y con continuidad en la Cátedra de Física II, Facultad de ingeniería de la UNLP, siendo Profesor Adjunto de la misma desde 1991 hasta su retiro en febrero de 2018.

Libros de Cátedra

Isidori, Alberto Nazareno
De los circuitos a los campos 1 : elementos de circuito / Alberto Nazareno Isidori. - 1a ed . - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1582-5

1. Electromagnetismo. I. Título.
CDD 538

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2017
ISBN 978-950-34-1582-5

e
exactas

Editorial de la Universidad de La Plata

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA